Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences – Meknès
Département de Physique

Option : Energétique
Filière : SMP 6

COURS
TRANSFERTS THERMIQUES

Pr. D. OULDHADDA
2019/2020

Chapitre 1

Généralités sur les échanges thermiques

1.1 Introduction

- La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur.
- Le transfert de chaleur se fait entre points d'un milieu matériel où règnent des températures différentes : la différence de température est la force motrice du transfert de chaleur.
- La thermique décrit quantitativement dans l'espace et dans le temps l'évolution des grandeurs caractéristiques en particulier la température $T(M,t)$ et le flux thermique $\varphi(M,t)$ entre l'état initial et l'état d'équilibre final du système.

1.2 Grandeurs physiques fondamentales

1.2.1 Température *T*

- C'est une grandeur physique qui décrit l'état thermique d'un corps.
- C'est la manifestation mesurable de la chaleur stockée.
- La température est liée à la moyenne de l'énergie cinétique due au mouvement des atomes et des molécules du corps.
- L'unité légale (S.I) : le Kelvin [*K*]

1.2.2 Champ de température

- La température est une fonction scalaire T(x,y,z,t) des coordonnées du repère d'espace-temps.
- Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Évolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou transitoire.

1.2.3 Notion de chaleur Q

- La chaleur est un processus de transfert d'énergie sous forme de chaleur.
- Un corps ne contient pas de chaleur, il en cède ou en reçoit.
- La chaleur se propage spontanément du corps ayant la température la plus élevée vers celui ayant la température la plus basse : ceci constitue le second principe de la thermodynamique.

- La chaleur Q s'exprime en Joules (*J*).

1.2.4 Flux thermique total ϕ

- Le flux thermique total ϕ représente la quantité d'énergie transférée sous forme de chaleur par unité de temps.

$$\phi = \frac{dQ}{dt} \qquad \text{(W)} \qquad (1.1)$$

- C'est donc une puissance, qui s'exprime en Watt (J/s).

1.2.5 Densité de flux de chaleur φ

- La densité de flux de chaleur φ représente le flux de chaleur total rapporté à l'unité de surface :

$$\varphi = \frac{d\phi}{dS} \qquad (\text{W/m}^2) \qquad (1.2)$$

1.2.6 Capacité thermique massique C

- La capacité thermique massique *C* ($\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$) est la quantité de chaleur nécessaire qu'il faut appliquer à 1kg de matière pour élever sa température de 1K.

- Lorsqu'on apporte une quantité de chaleur *Q* à un corps de masse *m* et de capacité *C*, il subit une élévation de température *ΔT* :

$$Q = m\, C\, \Delta T \qquad [J] \qquad (1.3)$$

1.2.6 Chaleur latente de changement de phase *L*

- On parle de chaleur latente lorsque le corps qui reçoit ou cède de la chaleur l'utilise pour un changement d'état, sans que sa température ne varie :

$$Q = m\, L \qquad [J] \qquad (1.4)$$

- *L* est la chaleur latente changement de phase en [J/kg].

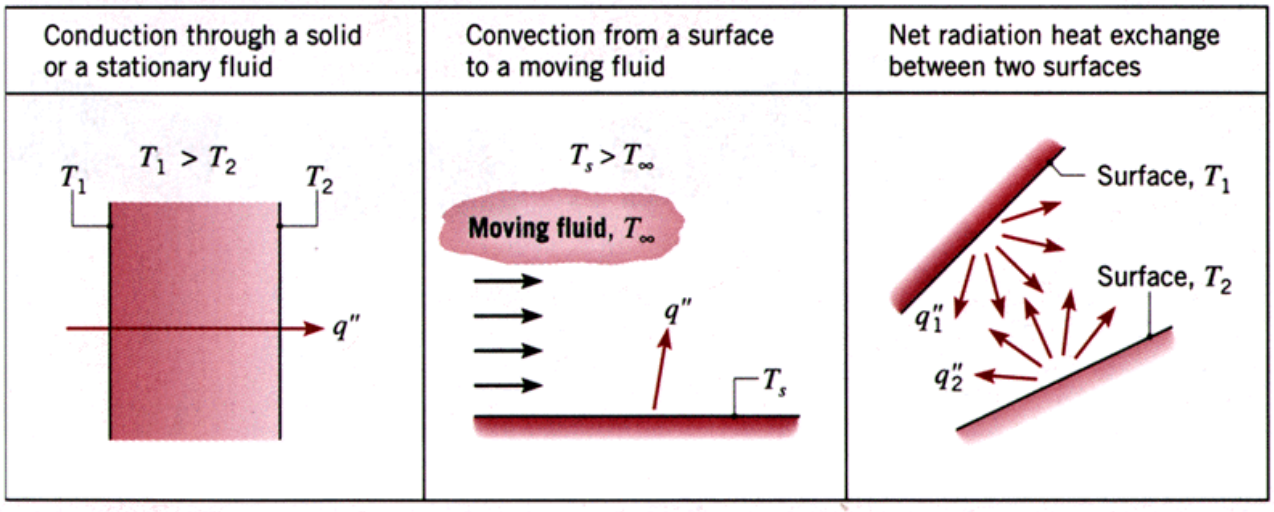
1.3 Différents modes de transferts thermiques

Il existe trois modes de transfert de chaleur dont chacun se fait selon un mécanisme bien déterminé :

- La conduction : transfert de chaleur survenant dans un milieu matériel (Fluide ou Solide) sous l'effet d'un gradient de température ;
- La convection : transfert de chaleur survenant dans un fluide en mouvement sous l'effet d'un gradient de température ;

- Le rayonnement : transfert de chaleur induit par l'échange d'ondes électromagnétiques entre un corps émetteur et un corps récepteur.

- **Exemple des trois modes de transfert de chaleur**.



Conduction à travers une paroi solide | Convection d'une surface à un fluide en mouvement | Rayonnement entre deux surfaces

Fig. 1.1 : Les trois modes de transfert de chaleur

1.3.1 Conduction thermique – loi de Fourier

- Le transfert de chaleur par conduction, qui ne nécessite pas de mouvement macroscopique de la matière, résulte d'un échange d'énergie entre les particules les plus énergétiques et les moins énergétiques,

- Dans les solides, le transfert de chaleur est causé par Les vibrations des réseaux cristallins (solides non-conducteurs) et déplacement d'électrons libres (métaux conducteurs).

Exemple : Une barre métallique chauffée à l'extrémité à gauche se réchauffe peu à peu sur toute la longueur jusqu'à l'extrémité à droite.

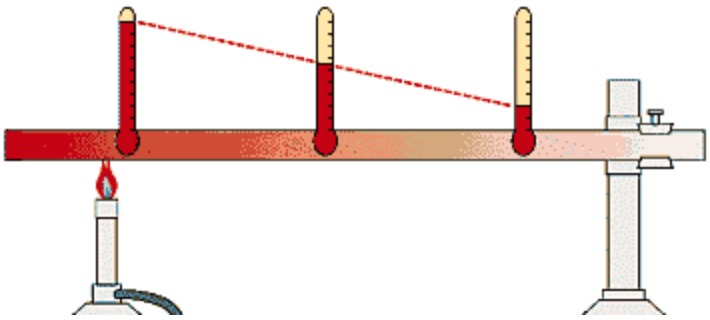
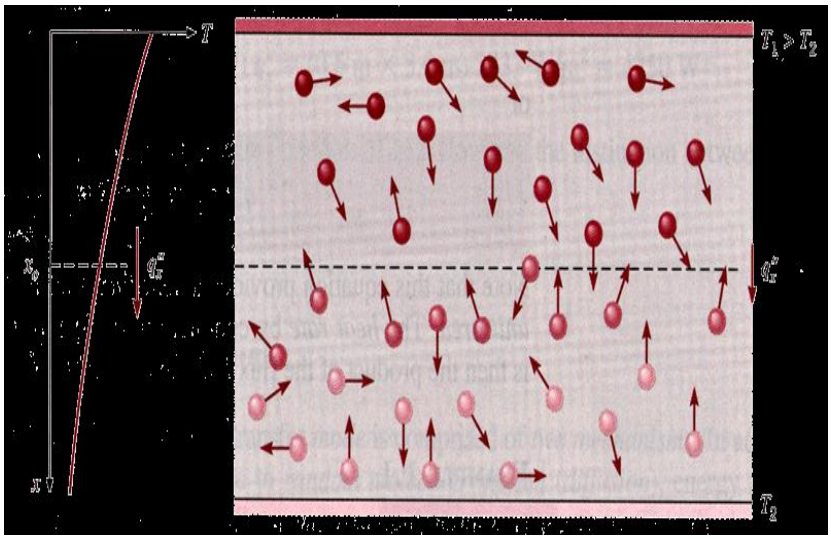


Fig. 1.2 : **Exemple de transfert de chaleur par conduction**

- Dans les fluides (liquide ou gaz), le transfert de chaleur est relié aux échanges d'énergie dû au mouvement aléatoire des molécules (agitation moléculaire ou chocs intermoléculaires).

Exemple : Mouvement aléatoire des molécules



- **Loi de Fourier**

➢ Ce mécanisme de transfert est régi par une loi établie par **Joseph Fourier** en 1822 : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla} T \quad \text{en } W/m^2 \qquad (1.5)$$

$\vec{\varphi}$: vecteur densité de flux en W/m^2,
λ : conductivité thermique en W/(m.K),
$\vec{\nabla} T$: gradient de température en K/m.

➢ Le signe ''−'' traduit le fait que le flux de chaleur circule des zones chaudes vers les zones froides (dans le sens opposé au gradient de température).

- **Gradient de température $\overrightarrow{grad}(T)$**

➢ À l'intérieur d'un corps homogène, on peut définir à chaque instant t des surfaces isothermes caractérisées par : T(x,y,z,t)=cste.

➢ Le gradient thermique et le vecteur densité du flux $\vec{\varphi}$ sont perpendiculaires aux surfaces isothermes

$$\overrightarrow{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial n}\vec{n} \quad avec \begin{cases} \vec{n} : Vecteur\ unitaire\ de\ la\ normale \\ \frac{\partial T}{\partial n} : Dérivée\ de\ la\ température\ le\ long\ de\ la\ normale \end{cases} \qquad (1.6)$$

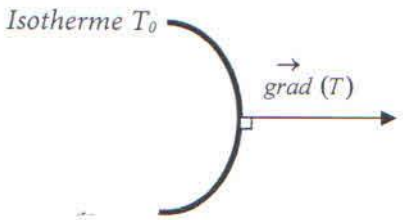


Fig. 1.3 : Isotherme et gradient thermique

- En effet : soit M et M ∈ à la surface isotherme tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dM}$, ce qui donne : $dT = \vec{\nabla}\mathrm{T}.\overrightarrow{\mathrm{dM}} = 0$. Par conséquent, le gradient de température et par suite le vecteur densité du flux $\vec{\varphi}$ sont perpendiculaires aux surfaces isothermes.
- La conductivité thermique dépend de la nature du corps considéré et dépend généralement de la température. Elle traduit la capacité d'un matériau à transporter la chaleur par conduction.
- **Exemples à la température ambiante** :

Matériau	λ (W.m^{-1}. °C^{-1})	Matériau	λ (W.m^{-1}. °C^{-1})
Argent	419	Plâtre	0,48
Cuivre	386	Amiante	0,16
Aluminium	204	Bois (feuillu-résineux)	0,12-0,23
Acier doux	45	Liège	0,044-0,049
Acier inox	15	Laine de roche	0,038-0,041
Glace	1,88	Laine de verre	0,035-0,051
Béton	1,4	Polystyrène expansé	0,036-0,047
Brique terre cuite	1,1	Polyuréthane (mousse)	0,030-0,045
Verre	1,0	Polystyrène extrudé	0,028
Eau	0,60	Air	0,026

Tableau 1.1 : Propriétés thermophysiques de certains matériaux

Exemple : Flux de chaleur conductif unidirectionnel

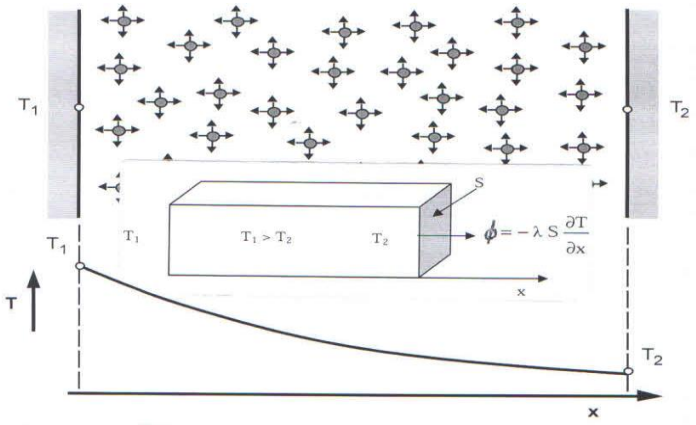


Fig. 1.4 : Schéma du transfert de chaleur par conduction dans une barre métallique due aux vibrations des atomes

L'équation 1.5 sous forme algébrique pour le flux de chaleur unidirectionnel ϕ (voir Figure 1.4) s'écrit :

$$\phi = \varphi S = -\lambda S \frac{dT}{dx} \qquad (1.7)$$

1.3.2 Convection thermique – loi de Newton

- La convection est un phénomène d'échange de chaleur qui nécessite un déplacement macroscopique de matière (liquide ou gaz).
- Ce mécanisme de transfert est régi par la **loi de Newton :** la densité de flux de chaleur échangée entre une paroi solide et un fluide en écoulement est proportionnelle à l'écart de température qui lui a donné naissance (Fig. 1.5a) :

$$\varphi = \vec{\varphi} \cdot \vec{n} = h(T_p - T_\infty) \qquad (1.8)$$

- Il s'agit d'un flux sortant du solide (entrant dans le fluide) si $Tp > T\infty$.

h : coefficient d'échange convectif, en $W.m^{-2}.K^{-1}$.
T_p : température sur la surface, en K
T_∞ : température du fluide loin de la surface, en K.

Exemple : Flux de chaleur convectif

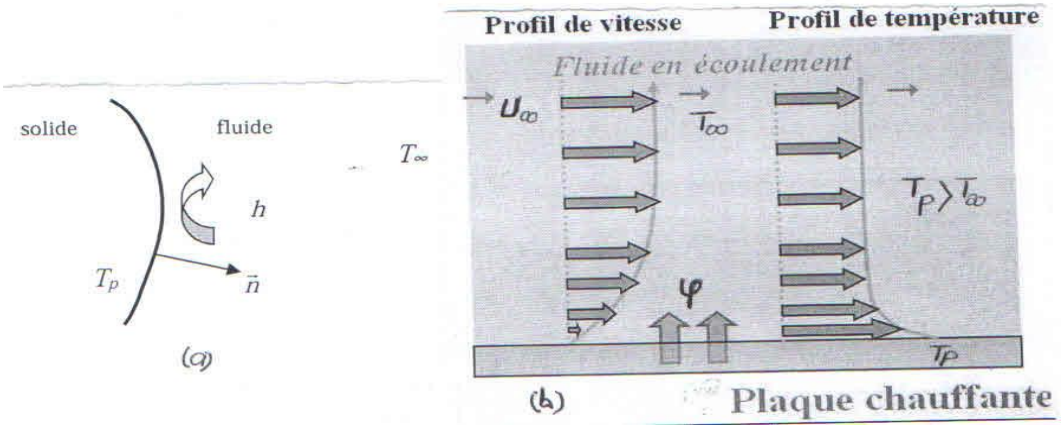


Fig. 1.5 : Schéma du transfert de chaleur par convection
(a) cas général, (b) plaque plane chauffante

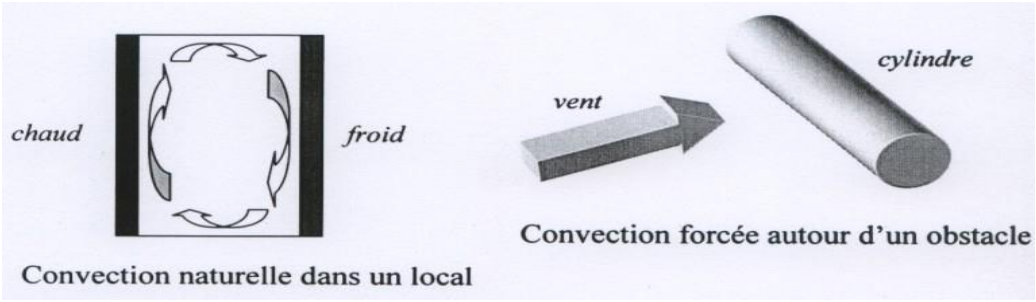
Pour la plaque plane chauffante, la densité de flux de chaleur échangée entre la surface et un fluide en écoulement s'écrit :

$$\varphi = h(T_p - T_\infty) \qquad (1.9)$$

- On distingue deux types de convection :

- la convection forcée : le mouvement du fluide est induit par une source externe (pompe, ventilateur…);

- la convection naturelle : le mouvement du fluide résulte directement de l'existence des gradients de température. Le fluide chaud, qui a une masse volumique plus faible que le fluide froid, aura tendance à monter sous l'effet de la poussée d'Archimède.
- les échanges avec changement de phase (condensation ou ébullition) sont aussi des modes de transfert par convection.



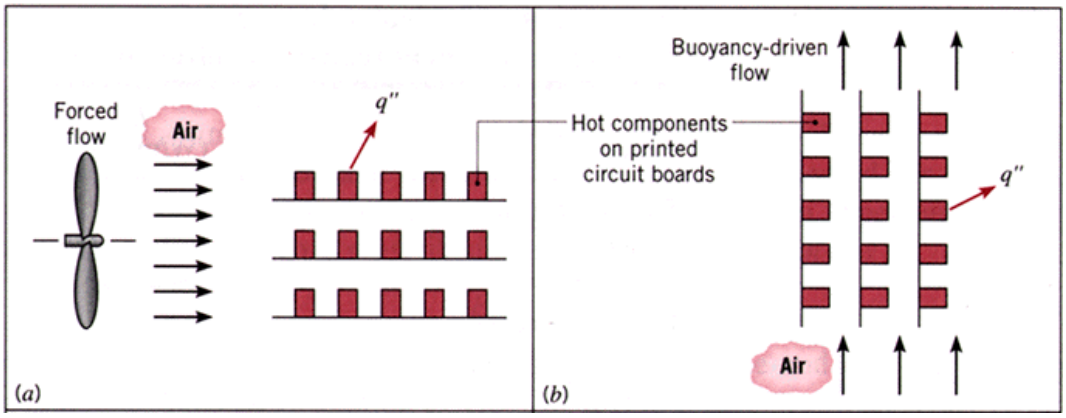


Fig. 1.6 : Cas de convection forcée (a) et naturelle (b)

1.3.3 Rayonnement thermique – loi de Stefan-Boltzmann

- Le transfert de chaleur par rayonnement entre deux surfaces à des températures différentes séparés par du vide ou un milieu semi-transparent se produit par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques (photons), donc sans support matériel.
  - La densité de flux maximale émise par une surface idéale (ou noire) à la température T_S est donnée par **la loi de Stephan-Bolztman** :

$$\varphi_{CN} = \sigma T_S^4 \qquad (1.10)$$

où σ est la constante de **Stephan-Boltzman** : σ = 5.669 10^{-8} W/(m^2.K^4)

- La densité de flux émise par une surface réelle maintenue à la température T_S ayant une certaine émissivité ε, (0 ≤ε≤ 1), s'écrit :

$$\varphi = \varepsilon\sigma T_S^4 = \varepsilon\varphi_{CN} \qquad (1.11)$$

Exemple : Surface réelle environnée d'une autre surface

Dans le cas où cette surface est environnée d'une autre surface à la température T_C, l'échange net de chaleur est alors :

$$\varphi_{échangé} = Flux\ émet - Flux\ absorbé = \varepsilon\sigma(T_S^4 - T_C^4) \qquad (1.12)$$

1.3.4 Transferts thermiques couplés

- En général, les trois modes de transfert de chaleur interviennent en même temps.
- Dans plusieurs situations pratiques, soit l'un est prépondérant, et l'on néglige alors les autres, soit les différents modes ont une importance comparable, mais ils peuvent être découplés et traités séparément.

1.4 Bilan d'énergie : Principe de conservation de l'énergie

- Pour déterminer l'évolution de la température à l'intérieur du système (Fig.1.7), on réalise donc un bilan d'énergie sur le système c'est-à-dire que l'on applique le premier principe de la thermodynamique :

Entrée – Sortie + Production = Accumulation

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{i}} - \dot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{s}} + \dot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{g}} = \dot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{st}} = \frac{\boldsymbol{dE_{st}}}{\boldsymbol{dt}} \qquad (1.13)$$

- $\dot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{i}}$ et $\dot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{s}}$: flux thermiques entrant et sortant respectivement à travers la surface du volume de contrôle.
- $\dot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{g}}$: puissance générée à l'intérieur du volume de contrôle (chimique, nucléaire, dissipation visqueuse, effet Joule dans une résistance électrique) qui est convertie en énergie thermique à l'intérieur du volume.
- $\boldsymbol{E_{st}}$: énergie accumulée (stockée) dans le volume du contrôle. Sa variation dans le temps peut être positive ou négative en régime transitoire et elle est nulle en régime permanent.

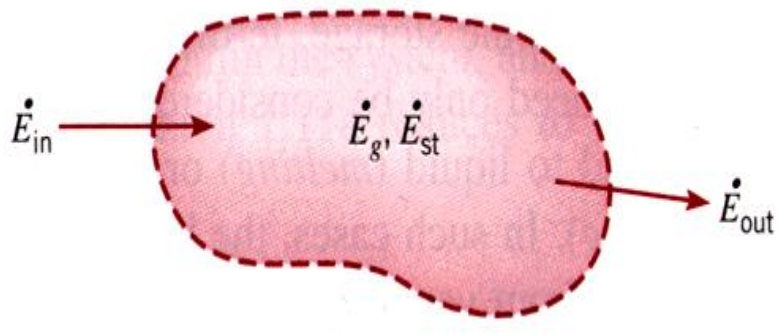


Fig. 1.7 Système et bilan thermique

Chapitre 2

Transfert de chaleur par conduction

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on traite les transferts de chaleur par conduction dans des milieux isotropes, surtout des solides opaques.

L'objectif est de déterminer la distribution de température T(M,t) au sein du milieu par la résolution de l'équation de la chaleur. En suite la loi de Fourier permet de calculer le flux de chaleur en tout point du système.

2.2 Loi de Fourier généralisée – Conductivité thermique

2.2.1 Loi de Fourier généralisée

La loi de Fourier donne en tout point d'un milieu la relation qui lie le vecteur densité de flux de chaleur au gradient de température.

Pour un champ de température T(M,t) dans un milieu isotrope, la loi de Fourier s'exprime sous forme vectorielle suivant la relation :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla} T \qquad (2.1)$$

2.2.2 Conductivité thermique

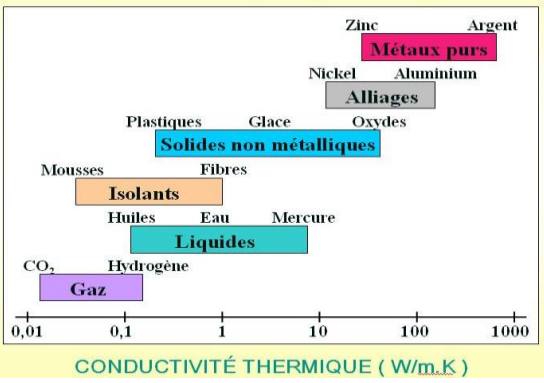
La conductivité thermique λ dépend des propriétés physiques du milieu. Elle est fonction du point M du milieu et de la température locale T. Les valeurs de λ varient de 10^{-2} à 10^{-3}.

En général : $\lambda_{gaz} < \lambda_{liquide} < \lambda_{s\ non\ conducteur} < \lambda_{s\ conducteur}$

Quelques conductivités thermiques (W/ m.K)

Liquides:		Gaz:	
Acetone	0.20	Air	0.026
Alcohol, ethyl	0.17	CO2	0.017
Mercury	8.7	Nitrogen	0.026
Oil, engine	0.15	Oxygene	0.027
Water	0.58		
Solides Métalliques:		**Non Métalliques:**	
Iron	73	Asbestos	0.16
Steel	46	Red Brick	0.63
Aluminum	210	Cardboard	0.2
Copper	386	Cement	0.30
Silver	406	Earth's crust	1.7
Gold	293	Glass	0.8
Yellow Brass	85	Fiberglass	0.04

La conductivité thermique de différents matériaux (comparaison) :



Remarque : Pour de nombreux matériaux si le domaine de température n'est pas trop grand, on peut admettre une variation linéaire de λ avec la température :

$$\lambda(T) = \lambda_0(1 + \beta(T - T_0)), \text{ avec } \lambda_0 = \lambda(T_0) \qquad (2.2)$$

2.2.3 Conductivité thermique d'un milieu non isotrope

Dans de nombreux cas rencontrés dans la nature ou bien parmi les objets fabriqués, la conductivité n'est pas isotrope mais orthotrope voir anisotrope.

Dans le cas orthotrope (matériaux composites ou fibrés), la relation (2.1) devient :

$$\vec{\varphi} = -\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\vec{\imath} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\vec{\jmath} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}\right) = \varphi_x\vec{\imath} + \varphi_y\vec{\jmath} + \varphi_z\vec{k} \qquad (2.3)$$

Cette relation définie trois composantes du flux chacune étant dépendante d'une valeur particulière de la conductivité.

La relation (2.1) s'écrit aussi sous la forme matricielle :

$$\vec{\varphi} = -\bar{\bar{\lambda}}\,\overrightarrow{\nabla T} \qquad (2.4)$$

où $\bar{\bar{\lambda}}$ est le tenseur d'ordre 2 de conductivité définit par :

$$\bar{\bar{\lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

2.3 Equations générales de la conduction

2.3.1 Equation générale de la chaleur – Bilan thermique

Considérons un système fermé solide (ou fluide au repos) homogène et indéformable de volume de contrôle (V) limité par une surface (S). En l'absence de travail échangé (pas de variation de volume), la variation de l'énergie interne du système (1er Principe de la thermodynamique ou conservation d'énergie) s'écrit :

$$\frac{dU}{dt} = \phi_{TR} + \phi_{PR} \qquad (2.6)$$

Avec :

- $\frac{dU}{dt}$: Taux d'accroissement de l'énergie emmagasinée dans le volume V,
- ϕ_{TR} : Flux thermique net échangé à travers la surface (S), $(\phi_{TR} = \phi_E - \phi_S)$
- ϕ_{PR}: Puissance générée par une source au sein du volume (V).

2.3.1.1 Equation de la chaleur monodimensionnelle

- **Bilan thermique**

Considérons un système solide de volume dV, d'épaisseur dX et de section d'aire S normale à la direction X (Fig. 2.1).

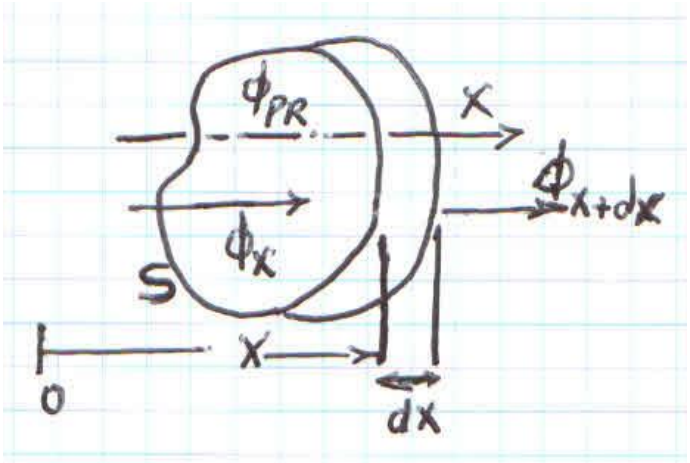


Fig. 2.1 : Élément pour l'équation de la conduction monodimensionnelle

Le bilan d'énergie (ou thermique) sur ce système de volume dV = SdX s'écrit :

$$\phi_{TR} + \phi_{PR} = \phi_X - \phi_{X+dX} + \phi_{PR} = \frac{dU}{dt} \qquad (2.7)$$

Avec :

$$\phi_X - \phi_{X+dX} = -\frac{\partial \phi_X}{\partial X} dX = \frac{\partial}{\partial X}\left(\lambda_X S \frac{\partial T}{\partial X}\right) dX$$

$$\phi_{PR} = PdV = PSdX \qquad (2.8a,b,c)$$

$$\frac{dU}{dt} = \rho C S dX \frac{\partial T}{\partial t}$$

- **Equation de la chaleur**

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par SdX nous obtenons :

$$\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial X}\left(\lambda_X S \frac{\partial T}{\partial X}\right) + P = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.9)$$

Où P représente la puissance volumique générée (W/m^3), ρ et C sont respectivement la masse volumique et la capacité thermique du système.

2.3.1.2 Equation de la chaleur en conduction dans différents systèmes de coordonnées

Le tableau ci-dessous résume l'équation de la chaleur dans divers systèmes de coordonnées.

Coordonnées	X	S	Equation de la chaleur	
Cartésiennes	x	S=Hl : ne dépend pas de x	$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + P = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$	(2.10a)
Cylindriques	r	S=2πrL	$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + P = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$	(2.10b)
Sphériques	r	S=4πr²	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\lambda_r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + P = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$	(2.10c)

Les équations de la chaleur (2.10a,b,c) peuvent être écrites sous la forme d'une seule équation (Equation compacte) :

$$\frac{1}{X^n}\frac{\partial}{\partial X}\left(X^n \lambda_X \frac{\partial T}{\partial X}\right) + P = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.11)$$

Avec :

$$\begin{cases} n = 0 \; et \; X = x : & coordonnées \; cartésiennes \\ n = 1 \; et \; X = r : & coordonnées \; cylindriques \\ n = 2 \; et \; X = r : & coordonnées \; sphériques \end{cases}$$

2.3.1.3 Equation de la chaleur en conduction à 3 dimensions

- **Coordonnées cartésiennes**

La généralisation de l'équation (2.10a) à 3D s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + P = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.12)$$

Sous forme vectorielle :

$$\vec{\nabla}.(\bar{\bar{\lambda}}\,\vec{\nabla}T) + P = \varrho C \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.13)$$

Avec : $\vec{\nabla}.\left(\bar{\bar{\lambda}}\,\vec{\nabla}T\right) = -\vec{\nabla}.\vec{\varphi} = -div\vec{\varphi}$

- **Cas général**

L'équation de la chaleur en conduction à 3D dans divers systèmes de coordonnées s'écrit :

$$\vec{\nabla}.(\bar{\bar{\lambda}}\,\vec{\nabla}T) + P = \varrho C\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.14)$$

2.3.2 Equation de la chaleur en milieu isotrope

Pour un milieu isotrope, les coefficients du tenseur $\bar{\bar{\lambda}}$ ne dépendent pas des variables d'espace ($\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$).

En appliquant la loi de Fourier pour un milieu isotrope :

$$\vec{\varphi} = -\lambda\vec{\nabla}T \qquad (2.15)$$

L'équation de la chaleur précédente devient :

$$\varrho c\frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla}.\left(\lambda\vec{\nabla}T\right) + P = div\lambda\vec{\nabla}T + P \qquad (2.16)$$

Si en plus, les propriétés physiques ne dépendent pas de la température, on obtient :

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \frac{P}{\lambda} \qquad (2.17)$$

Où ΔT représente le Laplacien et $\alpha = \lambda/\varrho c$ (en m^2/s) la diffusivité thermique du milieu. Elle mesure la vitesse de propagation de la chaleur dans un milieu.

2.3.3 Cas particuliers :

- **Equation de Poisson** : Milieu avec sources internes et en régime permanent.

$$\Delta T + \frac{P}{\lambda} = 0 \qquad (2.18)$$

- **Equation de Laplace** : Milieu sans sources internes et en régime permanent.

$$\Delta T = 0 \qquad (2.19)$$

- **Equation de Fourier** : Milieu sans sources internes et en régime variable.

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.20)$$

Pour un milieu homogène et isotrope avec des propriétés constantes (Eq. 2.17), l'équation générale de la chaleur peut s'écrire dans différentes systèmes de coordonnées :

- Coordonnées cartésiennes M(x,y,z) :

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{P}{\lambda} \qquad (2.21)$$

- Coordonnées cylindriques M(r,θ,z) :

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{P}{\lambda} \qquad (2.22)$$

- Coordonnées sphériques M(r,θ,φ) :

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 sin\theta}\left(sin\theta\,\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{P}{\lambda} \qquad (2.23)$$

2.4 Conditions initiales et aux frontières

L'équation de la chaleur (Eq. 2.17) est une équation aux dérivées partielles du second ordre dont la solution dépend de la distribution initiale des températures et des conditions thermiques sur les frontières du milieu.

2.4.1 Condition initiale

La répartition de température à l'instant t=0 dans le milieu est connue :

$$T(M,t=0) = T_0, \qquad M \in V \qquad (2.24)$$

2.4.2 Conditions aux frontières

- **Condition aux limites de type Dirichlet (Température imposée)**

La température T(M,t) est connue à tout instant t et en tout point M de la frontière S.

$$T(M,t) = T_S, \quad M \in S \text{ et } t > 0 \qquad (2.25)$$

- **Condition aux limites de type Neumann (Flux de chaleur imposé)**

La densité de flux φ(M, t) est connue à tout instant t et en tout point M de la frontière S.

$$\varphi = -\lambda \vec{\nabla} T . \vec{n} = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_S = \varphi_s \qquad (2.26)$$

Pour $\varphi_S = 0$, la surface frontière est dite adiabatique.

- **Condition mixtes :**

  - **Condition frontière de type Fourier (Échanges convectifs sur la frontière S)**

Il y a échange par convection avec le milieu extérieur à la température T_E. A la paroi S, on applique la loi de Fourier :

$$\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_S = h(T_S - T_E) \qquad (2.27)$$

Où h est le coefficient d'échange par convection entre la paroi et le milieu extérieur.

  - **Échanges radiatifs sur la frontière S**

Il y a échange par rayonnement avec le milieu extérieur à la température T_E. A la paroi S, on applique la loi de Stefan-Boltzmann :

$$\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_S = \varepsilon\sigma(T_S^4 - T_E^4) \qquad (2.28)$$

  - **Échanges combinés**

Sur la frontière S, il y a échange par convection et par rayonnement :

$$\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_S = h(T_S - T_E) + \varepsilon\sigma(T_S^4 - T_E^4) \qquad (2.29)$$

- **Condition à l'interface entre deux milieux**

Lorsque deux milieux (1) et (2) de conductivités respectives λ_1 et λ_2 possèdent une frontière commune S, il y a conservation des flux.

$$-\lambda_1 \vec{\nabla} T_1 = -\lambda_2 \vec{\nabla} T_2 \qquad (2.30)$$

  - **Contact parfait**

Si de plus le contact est parfait, il y a égalité des températures à l'interface :

$$T_1(M) = T_2(M), \quad M \in S \qquad (2.31)$$

  - **Contact n'est pas parfait**

Si le contact n'est pas parfait, ona :

$$T_1(M) - T_2(M) = R_{cont}\, \varphi \qquad (2.32)$$

où R_{cont} est la résistance de contact. Sa valeur dépend de l'état de surface.

Chapitre 3

Conduction thermique stationnaire

3.1 Conduction thermique en régime permanent

Régime permanent (ou stationnaire) $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

Pour un milieu isotrope et homogène, l'équation de conduction se réduit à l'équation de Poisson. À l'équation de conduction de la chaleur, il faut rajouter les expressions qui traduisent les conditions aux limites thermiques auxquelles est soumis le système.

3.1.1 Conduction monodimensionnelle sans sources internes ($p=0$)

- Le champ thermique $T(X)$ vérifié l'équation :

$$\frac{1}{X^n}\frac{d}{dX}\left(X^n \lambda \frac{dT}{dX}\right) = 0 \qquad (3.1)$$

X : Coordonnée généralisée

$n = 0$ et $X = x$: coordonnées cartésiennes,

$n = 1$ et $X = r$: Coordonnées cylindriques,

$n = 2$ et $X = r$: Coordonnées sphériques.

- Flux thermique total traversant une surface d'aire $S(X)$:

$$\Phi = S(X)\varphi = -\lambda S(X)\frac{dT}{dX} = \text{cste}. \qquad (3.2)$$

3.1.1.1 Conduction thermique à l'intérieur d'un mur plan.

a) Mur simple (une seule couche) à faces isothermes :

On considère un mur d'épaisseur e limité par deux surfaces planes parallèles d'aire S = cste, maintenues à des températures respectives T_1 et T_2, avec $T_1 > T_2$ (Fig. 3.1):

- Equation de conduction: (coordonnées Cartésiennes)

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \qquad (3.3)$$

C.L: $T(x=0) = T_1$ et $T(x=e) = T_2$

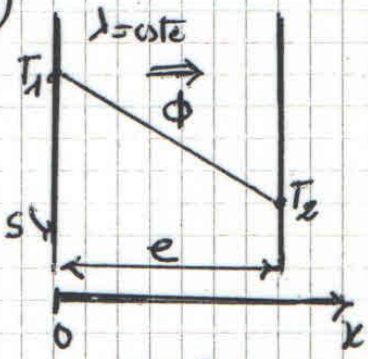


Fig. 3.1

- Champ de température T(x)

La solution de l'équation de (3.3) est:

$$T(x) = \frac{(T_2 - T_1)}{e} x + T_1 \qquad (3.4)$$

- Flux thermique total Φ:

D'après la loi de Fourier, le flux thermique à travers la surface isotherme d'aire S s'écrit:

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda S}{e}(T_1 - T_2) = \text{cste} \qquad (3.5)$$

- Analogie électrique : Résistance thermique

La relation (3.5) peut s'écrire sous la forme:

$$T_1 - T_2 = \frac{e}{\lambda S}\Phi \qquad (3.6)$$

Cette relation est similaire à la loi d'Ohm en électricité ($V_1 - V_2 = RI$), donc l'écart de température $(T_1 - T_2)$ et le flux thermique Φ sont respectivement <u>analogues</u>

à la différence de potentiel $(V_1 - V_2)$ et à l'intensité de courant électrique I.

Ceci nous conduit à définir la résistance thermique conductive R_{th} par :

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda S} \quad (°C/W) \qquad (3.7)$$

La conductance thermique K_{th} est définie comme l'inverse de la résistance :

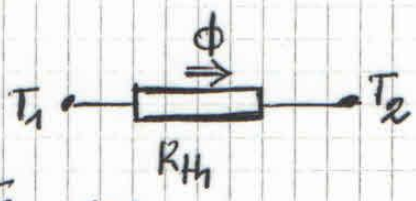
$$K_{th} = \frac{1}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{e} \quad (W/°C) \qquad (3.8)$$

On obtient alors :

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} = \frac{e}{\lambda S} \qquad (3.9)$$

L'analogie électrique permet donc de ramener l'étude du système réel à celui d'un circuit électrique.

Le schéma électrique équivalent du système étudié est le suivant :



avec : $\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$; (W)

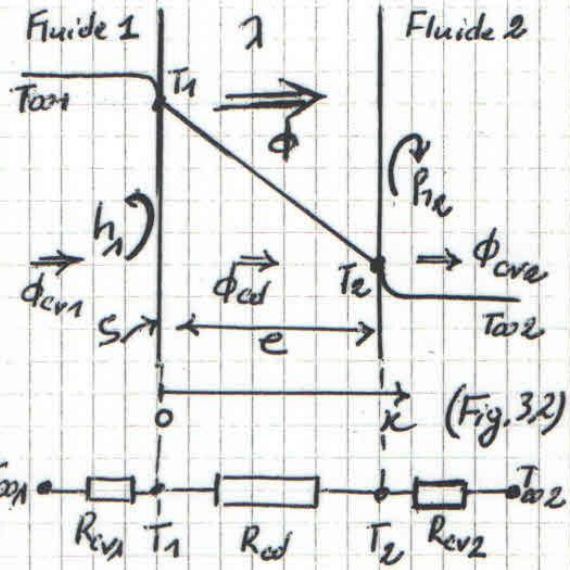
où : $R_{th} = \frac{e}{\lambda S} = \frac{1}{K_{th}}$ $(°C/W)$

b/ Mur plan (ou paroi) en contact avec deux fluides.

On considère un mur d'épaisseur e et de conductivité λ séparant deux fluides de températures $T_{\infty 1}$ et $T_{\infty 2}$. Les coefficients surfaciques de transfert thermique convectif sont h_1 et h_2 (Fig. 3.2). En régime permanent et sans sources, le flux thermique global ϕ se conserve :

Pour une surface S, nous avons

$$\Phi = \phi_{cv1} = \phi_{cd} = \phi_{cv2} = \text{cste} \quad (3.10)$$



avec : $\phi_{cv1} = h_1 S (T_{\infty 1} - T_1)$

$$\phi_{cd} = \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_2) \quad (3.11)$$

$$\phi_{cv2} = h_2 S (T_2 - T_{\infty 2})$$

Seules $T_{\infty 1}$ et $T_{\infty 2}$ sont connues, on peut donc éliminer les températures intermédiaires T_1 et T_2 par addition de (3.11) :

A partir des expressions (3.10) et (3.11), on en déduit :

$$\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_T} \quad (W) \quad (3.12)$$

avec : $R_T = R_{cv1} + R_{cd} + R_{cv2} = \frac{1}{h_1 S} + \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 S}$ $(^\circ C/W)$ (3.13)

R_T représente la résistance thermique totale.

Le profil $T(x)$ est donné par la solution de :

$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ avec $T(x=0) = T_1$ et $T(x=e) = T_2$

P.45

soit: $\begin{cases} T(x) = (T_2 - T_1)\frac{x}{e} + T_1 \quad ; \quad 0 \leq x \leq e \\ \Phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda S}{e}(T_1 - T_2) \end{cases}$

En fonction des résistances thermiques, $T(x)$ s'écrit:

$$T(x) = T_{\infty 1} - \left(R_{cv1} + \frac{x}{\lambda S}\right)\Phi \qquad (3.14a)$$

ou bien: $T(x) = (T_{\infty 1} - R_{cv1}\Phi) - R_{cd}\Phi\frac{x}{e}$ (3.14b)

c) Mur composite (n couches en série) en contact avec deux fluides (Fig. 3.3)

Pour un mur composé de n couches en série, en contact avec deux fluides (fluide 1 → $T_{\infty 1}$ et h_1, fluide 2 → $T_{\infty 2}$ et h_2) sur les deux faces extrêmes, le flux thermique s'écrit:

$$\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_T}, \ (W) \qquad (3.15)$$

avec:

$$R_T = R_{cv1} + \sum_{i=1}^{n} R_i + R_{cv2} \qquad (3.16)$$

où $R_i = \frac{e_i}{\lambda_i S}$; $(i = 1, 2, \ldots, n)$

(résistance thermique relative à la couche i)

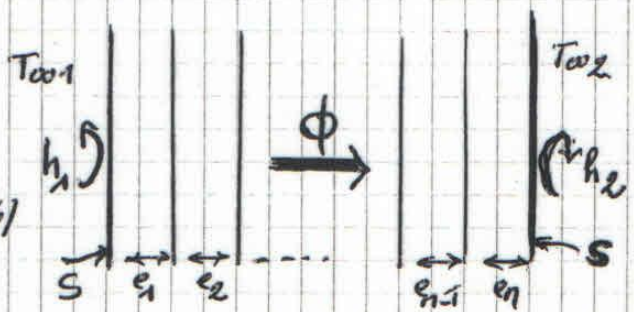


Fig. 3.3

Conclusion: Les corps placés en série ont donc leurs résistances qui s'ajoutent.

d) Mur composite avec n couches en parallèle (Fig. 3.4)

Dans le cas d'un mur composite constitué de n couches (couche $i \rightarrow S_i, e_i, \lambda_i$), le flux thermique total a pour expression:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_n \qquad (3.17a)$$

$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_T} = (T_1 - T_2)\, K_T \qquad (3.17b)$$

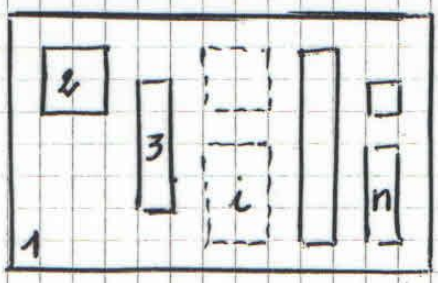


Fig. 3.4

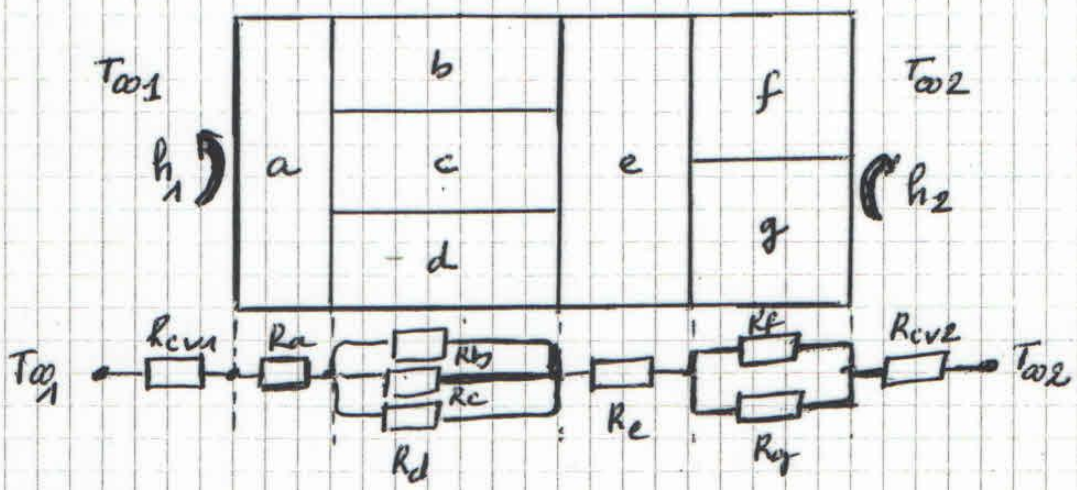
avec :

$$\frac{1}{R_T} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \quad \text{et} \quad K_T = \frac{1}{R_T} = \sum_{i=1}^{n} K_i \qquad (3.18a,b)$$

où $\quad R_i = \dfrac{1}{K_i} = \dfrac{e_i}{\lambda_i S_i} \qquad (3.18c)$

Conclusion : Ce sont donc les conductances thermiques qui s'ajoutent.

Exemple : Cas d'un mur composite de 7 éléments en parallèle en contact avec deux fluides sur les faces extrêmes (Fig. 3.5)



$$\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_T} \qquad (3.19)$$

avec :

$$R_T = R_{cv1} + R_a + \left(\frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_d}\right)^{-1} + R_e + \left(\frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_g}\right)^{-1} + R_{cv2}$$

(3.20)

3.1.1.2 Conduction entre cylindres concentriques

a) Cas d'un cylindre creux simple à surfaces latérales isothermes (Fig. 3.6)

r_1, r_2 : rayons intérieur et extérieur

T_1, T_2 : températures des faces intérieur et extérieur

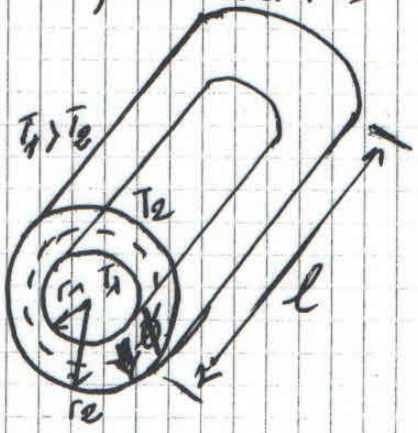


Fig. 3.6

Equation de conduction de la chaleur

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\lambda\frac{dT}{dr}\right) = 0 \qquad (3.21a)$$

Conditions aux limites : $T(r=r_1) = T_1$ et $T(r=r_2) = T_2$, (3.21b)

■ Distribution de la température $T(r)$:

$$(3.21a) \Rightarrow r\frac{dT}{dr} = \text{cste} = a \Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{a}{r}$$

Soit : $$\int_{T_1}^{T} dT = \int_{r_1}^{r} \frac{a}{r}\,dr \Rightarrow T(r) - T_1 = a \ln\frac{r}{r_1}$$

C.L : $T(r=r_2) = T_2 \Rightarrow a = \dfrac{T_2 - T_1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$

Finalement :

$$T(r) = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\ln\frac{r}{r_1} \quad ; \; r_1 \leq r \leq r_2 \qquad (3.22)$$

■ Flux thermique total $\Phi = \text{cste}$:

$$\Phi = -\lambda S(r)\frac{dT}{dr}, \text{ avec } S(r) = 2\pi r\ell \Rightarrow \boxed{\Phi = -2\pi r\ell\lambda\frac{dT}{dr}}$$

P.48

Soit: $\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\phi}{2\pi\ell\lambda}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = -\frac{\phi}{2\pi\ell\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}$

Donc: $\phi = 2\pi\lambda\ell\,\frac{(T_1-T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}} = 2\pi\lambda\ell\,\frac{(T_1-T_2)}{\ln\frac{d_2}{d_1}} = \frac{1}{R_{cd}}(T_1-T_2)$ (3.23)

avec: $R_{cd} = \frac{1}{2\pi\lambda\ell}\ln\frac{r_2}{r_1}$: Résistance Thermique ($^\circ C/W$) ; (3.24)

■ Le Champ $T(r)$ en fonction de ϕ:

(3.22) et (3.23) $\Rightarrow$ $T(r) = T_1 - \frac{\phi}{2\pi\lambda\ell}\ln\frac{r}{r_1}$ (3.25)

Remarques:

1°) Pour un cylindre creux mince d'épaisseur $e=(r_2-r_1)\ll r_1$,
$\ln\frac{r_2}{r_1} = \ln\left(1+\frac{e}{r_1}\right) \simeq \frac{e}{r_1}$, puisque $\frac{e}{r_1}\to 0$

2°) En pratique, on utilise souvent le flux thermique linéaire ϕ_ℓ (flux thermique global ϕ rapporté à l'unité de longueur du cylindre)

$$\phi_\ell = \frac{\phi}{\ell} = 2\pi\lambda\,\frac{(T_1-T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \quad (W/m) \qquad (3.26)$$

b) Cylindre creux en contact avec deux fluides (C.L de 3ème espèce).

Dans ce cas, il faut tenir compte des résistances thermiques convectifs R_{cv1} et R_{cv2}:

$$\phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_T} \qquad (3.27)$$

avec: $R_T = R_{cv1} + R_{cd} + R_{cv2} = \frac{1}{2\pi r_1 l h_1} + \frac{1}{2\pi\lambda l} \ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi r_2 l h_2}$ (3.28)

- Plus généralement, lorsqu'il y a n couches :

$$R_T = R_{cv1} + \sum_{i=1}^{n} R_i + R_{cv2} \quad (3.29a)$$

avec: $R_i = \frac{1}{2\pi\lambda_i l} \ln\frac{r_{i+1}}{r_i}$; $(i = 1, 2, .., n)$ (3.29b)

- En Pratique, on utilise le flux thermique linéaire ϕ_l:

$$\phi_l = \frac{\phi}{l} = h_{gl}(T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) \quad (W/m) \quad (3.30)$$

où h_{gl} représente le coefficient de transfert thermique global linéaire (en W/mK).

- Flux thermiques surfaciques intérieur φ_i et extérieur φ_e :

$$\varphi_i = \frac{\phi}{S_i} = \frac{\phi_l \cdot l}{\pi d_1 l} = \frac{h_{gl}(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\pi d_1} \quad (W/m^2) \quad (3.31a)$$

$$\varphi_e = \frac{\phi}{S_e} = \frac{\phi_l \cdot l}{\pi d_2 l} = \frac{h_{gl}(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\pi d_2} \quad (W/m^2) \quad (3.31b)$$

- Coefficients globaux de Transfert thermique intérieur et extérieur

$$\varphi_i = h_{gi}(T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) \Rightarrow h_{gi} = \frac{h_{gl}}{\pi d_1} \quad (W/m^2K) \quad (3.32a)$$

$$\varphi_e = h_{ge}(T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) \Rightarrow h_{ge} = \frac{h_{gl}}{\pi d_e} \quad (W/m^2K) \quad (3.32b)$$

3.1.1.3) Conduction entre sphères concentriques

a) Sphère creuse à surfaces isothermes

On considère une sphère creuse de rayon intérieur r_1 et extérieur r_2. Les surfaces limites ont des températures constantes et uniformes T_1 et T_2, avec $T_1 > T_2$ (Fig. 3.7)

En coordonnées sphériques, l'équation de conduction et les C.L sont :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\lambda\frac{dT}{dr}\right) = 0 & (3.33a) \\ \text{C.L: } T(r=r_1)=T_1 \text{ et } T(r=r_2)=T_2 & (3.33b) \end{cases}$$

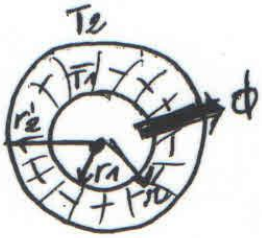


Fig. 3.7

■ Champ de température radial $T(r)$:

$$T(r) = T_1 + \frac{(T_1-T_2)r_1r_2}{(r_2-r_1)}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right) \qquad (3.34)$$

■ Flux thermique global ϕ = cste

$$\phi = -\lambda S(r)\frac{dT}{dr} \text{ , avec } S(r) = 4\pi r^2 \qquad (3.35)$$

$$\Rightarrow \int_{r_1}^{r_2}\frac{\phi}{\lambda 4\pi r^2}dr = -\int_{T_1}^{T_2}dT \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{4\pi\lambda r_1 r_2}{(r_2-r_1)}(T_1-T_2) = \frac{(T_1-T_2)}{R_{cd}}}$$

$$\text{avec : } R_{cd} = \frac{(r_2-r_1)}{4\pi\lambda r_1 r_2} = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \quad (°C/W) \qquad (3.36)$$

b) Cas de n couches avec les deux faces extrêmes isothermes ($T_1 > T_{n+1}$)

Plus généralement, lorsqu'il y a n couches :

$$(3.37)\ \phi = \frac{T_1 - T_{n+1}}{R_T} \ ; \ T_1 > T_{n+1} \text{ avec } R_T = \sum_{i=1}^{n}\frac{e_i}{4\pi\lambda_i r_i r_{i+1}} \qquad (3.38)$$

où $e_i = r_{i+1} - r_i$; $(i = 1, 2, \ldots n)$

3.1.2) Conduction monodimensionnelle avec Sources internes

Pour un milieu isotrope et homogène, l'équation de conduction se réduit à l'équation de Poisson. Les sources internes sont fonction de l'abscisse ou constantes et peuvent être d'origine électrique, nucléaire, chimique, etc.

3.1.2.1) En coordonnées Cartésiennes : $p(M) = p(x)$, d'où :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{p(x)}{\lambda} \qquad (3.57)$$

Dans ce cas le profil de Température dans le mur n'est plus linéaire

Cas Particulier : si $p = p_0 = cte$.

3.57 $\Rightarrow$ $T(x) = -\frac{p_0}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2$; (3.58)

C_1, C_2 = cstes à déterminer par les C.L

Plaque de longueur $2L$: $T(x=0) = T_0$ et $T(x=2L) = T_0$ (3.59)

$\Rightarrow C_1 = \frac{pL}{\lambda}$ et $C_2 = T_0 \Rightarrow$ $\boxed{T(x) = -\frac{p_0}{2\lambda} x^2 + \frac{pL}{\lambda} x + T_0}$

3.1.2.2) En coordonnées cylindriques. $p(r) = p(r)$:

Eq. de la Chaleur : $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\lambda r \frac{dT}{dr}\right) = -p(r)$ (3.60)

Si $p = p_0$ = cste, alors la solution de (3.60) est :

$T(r) = -\frac{p_0}{4\lambda} r^2 + C_1 \ln r + C_2$

- Si tube de longueur L et de rayon R, avec $T(r=R) = T_1$ alors la température doit rester finie en $r = 0$

d'où $C_1 = 0$

P.56

• $T(r=R) = T_1$, d'où $C_2 = T_1 + \frac{P_0 R^2}{4\lambda}$

Le profil de température est donc parabolique et la température est maximale en $r=0$ si $P_0 > 0$

■ $T(r) = \frac{P_0 R^2}{4\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + T_1$ 3.61

$T_{max} = T(r=0) = \frac{P_0 R^2}{4\lambda} + T_1$ (3.62)

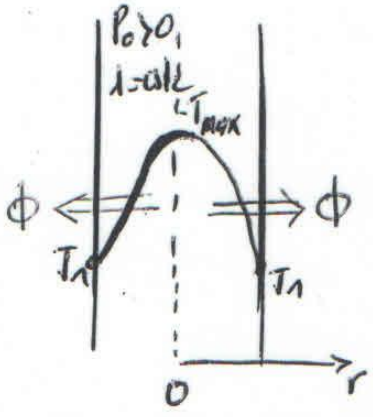


Fig. 3.9

■ Flux de Chaleur $\phi(r)$

Le flux de chaleur qui traverse la surface à la position r :

$$\phi(r) = -\lambda 2\pi r L \frac{dT(r)}{dr} = \pi r^2 L P_0 = f(r) \quad (W) \quad (3.63)$$

Conséquences

• Le flux de chaleur qui traverse la surface latérale ($r=R$) du tube est :

$$\phi(r=R) = \pi R^2 L P_0 \quad (W) \quad (3.64)$$

3.1.1.4 Conduction thermique monodimensionnelle dans les ailettes

Pour augmenter le transfert de Chaleur entre une surface et un fluide, on place sur celle-la des ailettes ayant une bonne conductivité thermique et une épaisseur (ou un rayon) faible. Ainsi, la surface totale d'échange se trouve augmentée d'une manière artificielle. Ces ailettes peuvent avoir une section constante ou non.

a) Ailette à section droite uniforme.

a1) Distribution de Température T

Pour cette ailette qui pénètre dans le fluide à T_∞ dans une direction ox, on considère que la température est la même dans une section droite de l'ailette (ou tige) de longueur L, donc: $T = T(x)$ avec $T(x=0) = T_0$

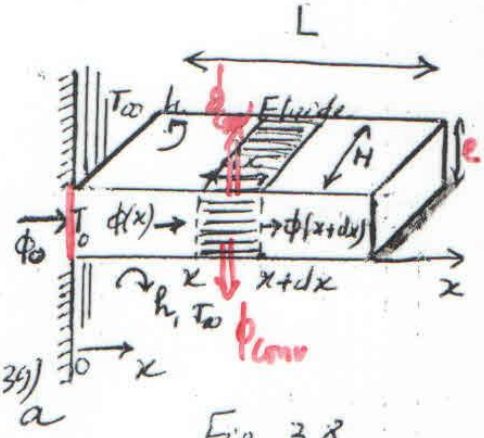


Fig. 3.8

Ainsi pour une ailette de section uniforme S, le bilan thermique entre les sections x et x+dx (Fig. 3.8) donne:

$$\phi(x) - \phi(x+dx) = h_p [T(x) - T_\infty] dx \quad (3.39)a$$

(ϕ_{conv})

Avec p le périmètre de l'ailette et h le coefficient d'échange par Convection.

Sachant que: $\phi(x) - \phi(x+dx) = -d\phi(x)$

Et en utilisant la loi de Fourier: $\frac{d\phi(x)}{dx} = -\lambda S \frac{d^2T}{dx^2}$ (3.39b)

l'équation de bilan, s'écrit alors:

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = \frac{hP}{\lambda S}\left(T(x) - T_\infty\right) \quad (3.40)$$

P.52

En posant : $\theta(x) = T(x) - T_\infty$ et $m^2 = hp/\lambda S$, on obtient :

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - m^2\theta = 0 \qquad (3.41)$$

La solution générale de cette équation s'écrit sous la forme :

$$\theta(x) = A_1 e^{mx} + A_2 e^{-mx} \quad \text{ou} \quad \theta(x) = B_1 \operatorname{ch} mx + B_2 \operatorname{sh} mx \qquad (3.42)$$

on montre que : $B_1 = (A_1 + A_2)$ et $B_2 = (A_1 - A_2)$.

A la base de l'ailette ($x=0$) : $\theta(x=0) = \theta_0 = T_0 - T_\infty$.

Remarques :

1°) Pour une ailette à section rectangulaire de largeur H et d'épaisseur e : $p = 2(H+e)$ et $S = H.e$

2°) Pour une ailette circulaire de rayon r : $p = 2\pi r$ et $S = \pi r^2$

3°) Les constantes B_1 et B_2 sont définies par les conditions aux limites.

4°) Selon les conditions aux limites thermiques sur le bout de l'ailette ($x=L$), l'équation de bilan avec la condition en $x=0$, à une solution donnée.

- Etude des différents Cas :

- **Cas 1** : Ailette de longueur finie avec convection imposée à l'extrémité

C.L : pour $x = 0$, $T = T_0$ ou $\theta = \theta_0 = T_0 - T_\infty$ (3.43a)

pour $x = L$, $-\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = h_e (T_L - T_\infty)$ ou $-\lambda \frac{d\theta}{dx} = h_e \theta_L$ (3.43b)

h_e peut être différent de h. L'application de cette condition donne la distribution de température $\theta(x)$ dans l'ailette :

-) $$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{\operatorname{ch}[m(L-x)] + h_e^* \operatorname{sh}[m(L-x)]}{\operatorname{ch}[mL] + h_e^* \operatorname{sh}[mL]} \qquad (3.44)$$

P.53

avec : $h_e^* = \frac{h_e}{\lambda m}$

oo) Flux de Chaleur dégagé par l'ailette:

Le flux de chaleur (ou puissance) total dégagé (ou dissipée) par l'ailette est égal au flux thermique entrant par conduction Φ_0, ($\Phi(x=0) = \Phi_0$) :

$$\Phi_{ailette} = \Phi_0 = -\lambda S \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = \int_0^L h\theta(x) p\,dx + h_e S \theta_L = \theta_0 \sqrt{\lambda h p S} \left(\frac{sh(mL) + h_e^* ch mL}{ch(mL) + h_e^* sh mL} \right) \quad (3.45)$$

Cas 2: Ailette de Longueur finie avec convection nulle à l'extremité (bout de l'ailette adiabatique).

C.L : $T(x=0) = T_0$ et $\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0$

Le profil de température et le flux thermique dégagé (ou évacué) peuvent être déduits de ceux d'avant en posant $h_e^* = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{ch[m(L-x)]}{Ch(mL)} = \frac{ch[mL(1-\xi)]}{Ch(mL)}, \text{ avec } \xi = x/L \quad (3.46) \\ \Phi_{ailette} = \Phi_0 = -\lambda S \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = \int_0^L h\theta(x) p\,dx = \theta_0 \sqrt{hp\lambda S}\, th(mL) \quad (3.47) \end{cases}$$

Cas 3: Ailette de longueur finie avec température extrême Connue T_L (Bout de l'ailette isotherme T_L) :

Les C.L donnent:

$$\begin{cases} \frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{(\theta_L/\theta_0)\, sh(mx) + sh[m(L-x)]}{sh(mL)} \quad (3.48) \\ \Phi_0 = -\lambda S \left.\frac{d\theta(x)}{dx}\right|_{x=0} = \int_0^L h\theta(x) p\,dx + hS\theta_L = \theta_0 \sqrt{\lambda h p S} \left(\frac{ch(mL) - (\theta_L/\theta_0)}{sh(mL)} \right) \quad (3.49) \end{cases}$$

P.54

Cas 4 : Ailette Longitudinale très longue ($L \to \infty$)

Le bout de l'ailette serait dans ce cas en équilibre thermique avec l'extérieur, d'où : $T(x=L) = T_\infty$ ou $\theta(x=L) = 0$

* Profil de température : $\boxed{\frac{\theta(x)}{\theta_0} = e^{-mx}}$ (3.50)

* Flux thermique dégagé : $\boxed{\phi_0 = -\lambda S \left.\frac{d\theta(x)}{dx}\right|_{x=0} = \int_0^L h\theta(x) p\, dx = \theta_0 \sqrt{hp\lambda S}}$ (3.51)

Q-2) Rendement η et Efficacité ε d'une ailette

- L'ailette idéal aurait une conductivité infinie, donc toute l'ailette serait isotherme à $T = T_0$, c.à.d $\theta = \theta_0$, $\forall x$:

Flux idéal : $\phi_{id} = [hpL + h_e S](T_0 - T_\infty) = (hpL + h_e S)\theta_0$ (3.52)

- Le rendement de l'ailette est donc :

$$\boxed{\eta = \frac{\phi_0}{\phi_{id}}} \quad (3.53)$$

- L'Efficacité ε d'une ailette est le rapport de chaleur dégagé par l'ailette et celui qui serait évacué sans ailette :

(3.54) $\boxed{\varepsilon = \frac{\phi_0}{\phi_{sa}}}$ avec $\boxed{\phi_{sa} = hS(T_0 - T_\infty)}$ (3.55)

b/ Ailette à section variable.

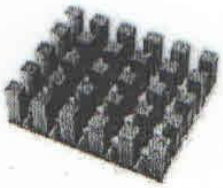
En pratique, on utilise souvent ce genre d'ailette. Dans ce cas nous avons : $S(x)$ et $p(x)$: Surface et périmètre variable. Pour un élément d'ailette dx, on a déjà le bilan thermique (3.39)

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\lambda S(x) \frac{dT}{dx}\right) = h p(x)(T - T_\infty)} \quad (3.56)$$

Eq. dif binaire à coef. var P.55

Les ailettes

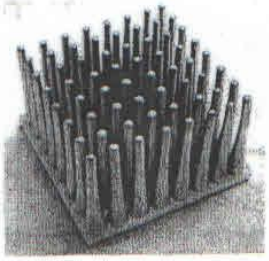
Carrée ou rectangulaire



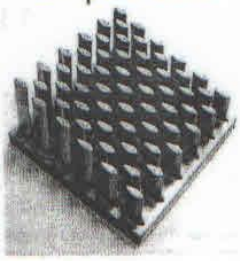
Cylindrique (∅ = cst)



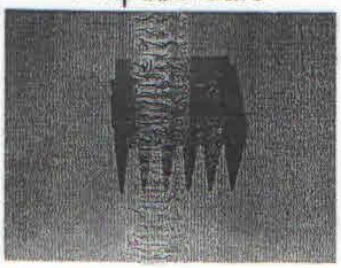
Cylindrique (∅ ≠ cst)



Ellipsoïdale



Trapézoïdale



Nid d'abeille



Les ailettes

Les ailettes

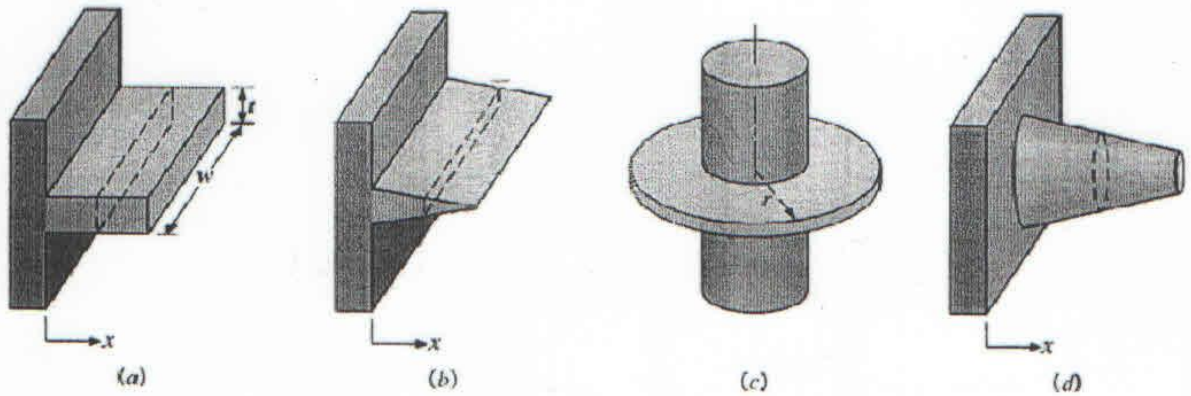


FIGURE 3.14 Fin configurations. (*a*) Straight fin of uniform cross section. (*b*) Straight fin of nonuniform cross section. (*c*) Annular fin. (*d*) Pin fin.

Chapitre 5

Rayonnement thermique

5.1 Généralité sur le rayonnement

5.1.1 Transfert de chaleur par rayonnement

Le rayonnement thermique est un phénomène d'échange d'énergie entre corps sous formes d'ondes électromagnétiques. Cette forme de transfert d'énergie n'a pas besoin d'aucun support matériel solide ou fluide.

5.1.2 Rayonnement électromagnétique

Dans un milieu matériel, ces ondes électromagnétiques sont constituées par de radiations monochromatiques caractérisées par leur longueurs d'onde λ et leur fréquence ν reliées par :

$$c = \lambda\nu \quad ; \quad c = \frac{c_0}{n} \quad ; \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n} \qquad (5.1)$$

Où c_0 est la vitesse de la radiation dans le vide ($c_0 \approx 3\ 10^8$ m/s), λ_0 la longueur d'onde dans le vide et n l'indice de réfraction du milieu.

Ces ondes électromagnétiques sont porteuses de photons dont chacun transporte une quantité d'énergie E suivant la loi :

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \qquad (5.2)$$

Où h = 6,6256 10^{-34} J.s est la constante de Planck.

5.1.3 Rayonnement thermique

Le rayonnement thermique est composé de radiations de longueurs d'ondes différentes, comprises entre 0,1 µm et 100 µm. Il s'agit d'un flux de chaleur émis par le corps considéré (Fig. 5.1)

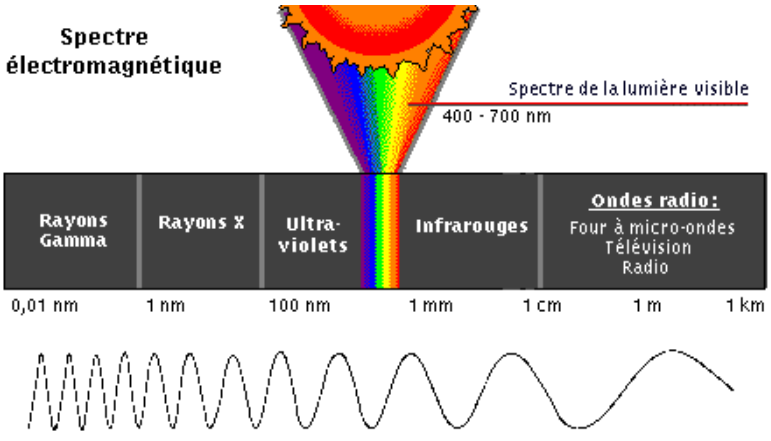


Fig. 5.1 : Spectre électromagnétique

Le spectre du rayonnement thermique inclut :

- Le rayonnement visible de 0,4 µm à 0,8 µm.
- Les rayons thermiques d'ultraviolet (UV) de 0,1 µm à 0,4 µm.
- Le rayonnement infrarouge (IR) de 0,8 µm à 100µm.
- Le rayonnement solaire de 0,2 µm à 3 µm.

5.2 Grandeurs physiques liées au rayonnement

5.2.1 Définition de l'angle solide

L'angle solide dΩ entourant une direction Ox sous lequel, d'un point O, on voit une surface quelconque dS centrée en M (Fig. 5.2) est défini par la relation suivante :

$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS}.\vec{u}}{R^2} = \frac{dS\cos\alpha}{R^2} = \frac{d\Sigma}{R^2} \qquad (5.3)$$

$\overrightarrow{dS}$: vecteur élément de surface,

$\vec{u}$: vecteur unitaire du rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$,

α : angle entre $\vec{u}$ et $\vec{n}$,

dΣ : élément d'aire projetée de $\overrightarrow{dS}$ sur $\vec{u}$.

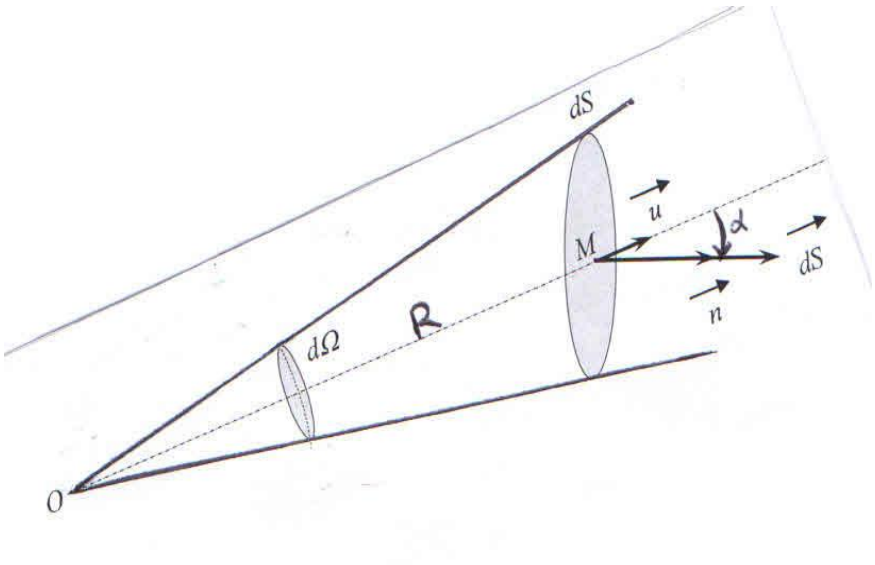


Fig. 5.2 : Angle solide dΩ dans le cas général

5.2.2 Grandeurs physiques liées à l'émission (émetteur)

5.2.2.1 Flux émis par une surface d'un corps

Le flux thermique émis par la surface d'un corps dans tout l'espace où elle peut rayonner sera notée ϕ^e :

$$\phi^e = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{W}) \qquad (5.4)$$

5.2.2.2 Luminance d'un flux radiatif

- **Luminance $L^e_{x,\lambda}$ d'un flux émis**

La luminance monochromatique dans la direction Ox (Fig. 5.3) de $d^3\phi^e_{x,\lambda}$ est donnée par la relation :

$$L^e_{x,\lambda} = \frac{d^3\phi^e_{x,\lambda}}{dS\cos\theta\, d\Omega\, d\lambda} \quad (\mathrm{W/m^3.sr}) \tag{5.5}$$

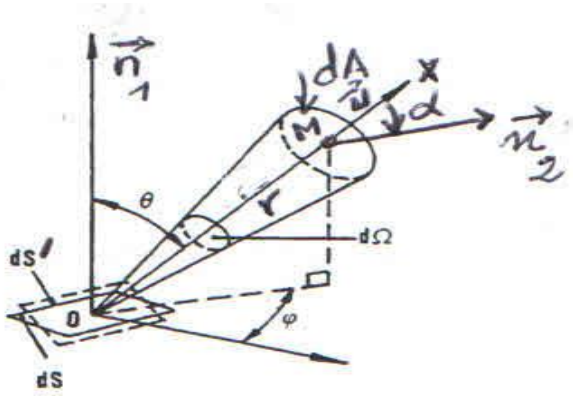


Fig. 5.3 : Définition de la luminance d'un flux émis

Avec :

$d^3\phi^e_{x,\lambda}$: Flux émis par un élément de surface dS d'un corps dans un angle solide élémentaire dΩ entourant la direction Ox et dans la bande spectrale [λ, λ+dλ].

dS' = dS cosθ : Surface projetée (ou surface apparente) de dS dans la direction Ox.

dA : Surface réceptrice à travers laquelle passe le rayonnement $d^3\phi^e_{x,\lambda}$.

$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dA}.\vec{u}}{r^2} = \frac{dA\cos\alpha}{r^2}$ **:** Angle solide élémentaire entourant la direction Ox.

θ : Angle que fait la normale à la surface émettrice dS avec la direction Ox.

α : Angle que fait la normale à la surface réceptrice dA avec la direction Ox.

r : Distance entre les centres de dS et dA.

- **Grandeurs radiatives totales dans la direction Ox :**

Elles sont données par :

$$L^e_x = \int_{\lambda=0}^{\infty} L^e_{x,\lambda}\, d\lambda \quad (\mathrm{W/m^2.sr}) \tag{5.6}$$

$$d^2\phi^e_x = \int_{\lambda=0}^{\infty} d^3\phi^e_{x,\lambda} = L^e_x\, dS\cos\theta\, d\Omega \quad (\mathrm{W}) \tag{5.7}$$

- **Flux hémisphériques monochromatique et total :**

Elles s'écrivent respectivement par :

$$d^2\phi^e_\lambda = \int_\cap d^3\,\phi^e_{x,\lambda} \tag{5.8}$$

$$d\phi^e = \int_{\lambda=0}^{\infty} d^2\phi^e_\lambda \tag{5.9}$$

Où le symbole ∩ désigne le demi-espace (ou l'espace hémisphérique).

- **Densité du flux émise par dS :**

Elle est définie par :

$$\varphi^e = \frac{d\phi^e}{dS} \qquad (W/m^2) \tag{5.10}$$

5.2.2.3 Loi de Lambert

Une source obéit à la loi de Lambert si sa luminance est indépendante de la direction Ox ($L_x = L$). On parle de source **isotrope** ou **diffuse**.

5.2.2.4 Emittance (ou Exitance)

- **Emittance monochromatique hémisphérique M_λ**

Elle est définie par :

$$M_\lambda = \frac{d^2\phi^e_\lambda}{dS\, d\lambda} = \int_\cap L^e_{x,\lambda}\, cos\theta d\Omega \quad (W/m^3) \tag{5.11}$$

- **Emittance totale hémisphérique M**

Elle représente la densité du flux émise par dS pour toutes les longueurs d'ondes et toutes les directions :

$$M = \int_{\lambda=0}^{\infty} M_\lambda d\lambda = \frac{d\phi^e}{dS} \qquad (W/m^2) \tag{5.12}$$

- **Emittance d'une source isotrope**

En prenant dA sur une sphère de rayon r, l'angle solide élémentaire dΩ s'écrit :

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{5.13}$$

Pour une source isotrope, les relations précédentes sont données respectivement par :

$$M_\lambda = L^e_\lambda \int_\cap cos\theta d\Omega = L^e_\lambda \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} cos\theta\, sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \pi\, L^e_\lambda \tag{5.14}$$

$$M = \int_{\lambda=0}^{\infty} M_\lambda d\lambda = \pi \int_{\lambda=0}^{\infty} L^e_\lambda d\lambda = \pi L^e \tag{5.15}$$

5.2.3 Grandeurs physiques liées à la réception (récepteur)

5.2.3.1 Flux réfléchi, absorbé et transmis

La conservation de l'énergie, pour un corps semi-transparent, s'exprime par la relation suivante (Fig. 5.4).

$$d^3\phi^i_{x,\lambda} = d^3\phi^r_{x,\lambda} + d^3\phi^t_{x,\lambda} + d^3\phi^a_{x,\lambda} \tag{5.16}$$

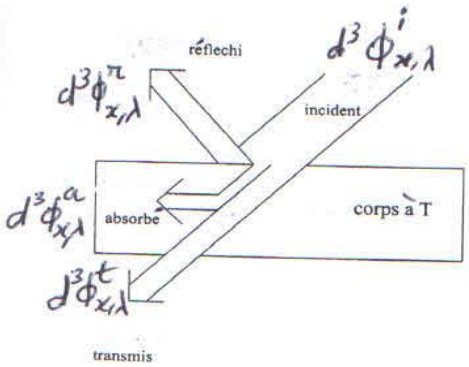


Fig. 5.4 : Réception d'un rayonnement thermique par un corps.

Les grandeurs hémisphériques monochromatique $d^2\phi_\lambda^i$ et totale $d\phi^i$sont données respectivement par :

$$d^2\phi_\lambda^i = d^2\phi_\lambda^r + d^2\phi_\lambda^t + d^2\phi_\lambda^a \quad (5.17)$$

$$d\phi^i = d\phi^r + d\phi^t + d\phi^a \quad (5.18)$$

5.2.3.2 Eclairement (ou Irradiation)

- **Eclairement monochromatique**

En considérant dS comme surface réceptrice d'un corps, son éclairement monochromatique est définie par :

$$E_\lambda = \frac{d^2\phi_\lambda^i}{dS\, d\lambda} = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} L_{x,\lambda}^i cos\theta\, sin\theta\, d\theta\, d\varphi \quad (5.19)$$

C'est donc la densité de flux incident sur dS de toutes les directions.
$L_{x,\lambda}^i$ représente la luminance monochromatique du flux élémentaire incident $d^3\phi_{x,\lambda}^i$ sur l'élément de surface dS.

- **Eclairement total**

L'éclairement total est la densité du flux incident sur dS dans toutes les longueurs d'ondes et de toutes les directions :

$$E = \frac{d\phi^i}{dS} = \int_{\lambda=0}^{\infty} E_\lambda d\lambda \quad (5.20)$$

- **Flux incident isotrope**

Dans ce cas, les relations précédentes deviennent :

$$E_\lambda = L_\lambda^i \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} cos\theta\, sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \pi\, L_\lambda^i \quad (5.21)$$

$$E = \int_{\lambda=0}^{\infty} E_\lambda d\lambda = \pi\, L^i \quad (5.22)$$

5.2.3.3 Radiosité d'une surface

La radiosité est la densité du flux quittant une surface dS, dans toutes les directions ∩, par émission et réflexion. Donc les radiosités monochromatique J_λ et totale J de dS sont données respectivement par :

$$J_\lambda = \frac{d^2\phi_\lambda^e}{dS\, d\lambda} + \frac{d^2\phi_\lambda^r}{dS\, d\lambda} \quad (\mathrm{W/m^3}) \qquad (5.23)$$

$$J = \int_{\lambda=0}^{\infty} J_\lambda d\lambda \qquad (\mathrm{W/m^2}) \qquad (5.24)$$

5.3 Rayonnement des corps noirs

5.3.1 Définition du corps noir

- Un corps noir est un corps idéal qui absorbe la totalité du rayonnement incident quelques soient les longueurs d'onde et les directions de propagation.
- C'est aussi le corps qui rayonne, à une température donnée, le maximum d'énergie pour chaque longueur d'onde et ceci de façon isotrope. C'est un absorbeur et émetteur parfait.
- Il sert comme référence pour évaluer les flux émis par les corps réels.
- Par convention, toutes les grandeurs relatives au corps noir seront affectées de l'exposant ''°''.

5.3.2 Loi de Planck

Cette loi relie l'émittance monochromatique du corps noir, M_λ°, à sa température absolue T par :

$$M_\lambda^\circ(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} \quad (\mathrm{W/m^3}) \qquad (5.25)$$

Avec :

$c = \frac{c_0}{n}$: Vitesse de la lumière dans un milieu d'indice *n*,
h : Constante de Planck, h = 6,6255 10^{-34} J.s.
k : Constante de Boltzmann, k = 1,3805 10^{-23} J/K.

Lorsque le rayonnement se propage dans le vide ou dans l'air (*n*=1), la loi de Planck s'écrit sous la forme :

$$M_\lambda^\circ = \frac{C_1\lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} \qquad (5.26)$$

Où : $C_1 = 2\pi hc_0^2 = 3{,}742\ 10^8\ W.\mu m^4.m^{-2} = 3{,}742\ 10^{-16}\ W.m^2$

$$C_2 = \frac{hc_0}{k} = 1{,}439\ 10^4\ \mu m.K = 0{,}0143\ m.K$$

- **Variation de l'émittance monochromatique avec T :**

La figure (5.5) représente les courbes de variation de l'émittance monochromatique d'un corps noir M_λ°, calculées à l'aide de la relation (5.26), pour diverses valeurs de température absolue de ce corps.

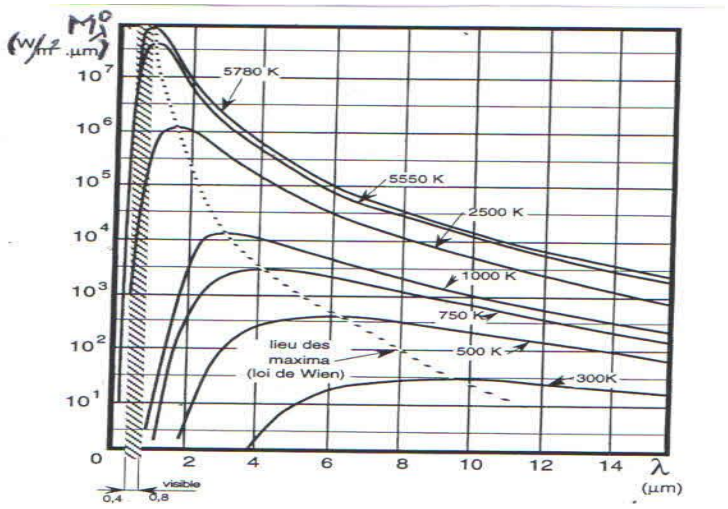


Fig. 5.5 : Loi de Planck – Distribution spectrale de l'émittance du corps noir M_λ° à différentes températures

Chaque courbe présente, pour une certaine abscisse λ_m, un maximum d'autant plus prononcé que la température T est plus élevée.

5.3.3 Lois de Wien

Les lois de Wien fournissent l'abscisse λ_m et l'ordonnée, $M_{\lambda_m}^\circ$, du maximum de l'émittance monochromatique M_λ° du corps noir à chaque température.

- **1ère loi de Wien (ou loi du déplacement) :**

Cette loi permet de déterminer λ_m pour laquelle l'émittance est maximale pour une température donnée :

$$\frac{dM_\lambda^\circ}{d\lambda} = 0$$

La solution numérique donne :

$$\lambda_m T = 2898\ \mu m.K = constante \qquad (5.27)$$

- **2ère loi de Wien :**

Cette loi fournie l'ordonnée du maximum $M_{\lambda_m}^\circ$ en fonction de T. Elle s'exprime par :

$$M_{\lambda_m}^\circ = BT^5 \qquad (\text{W/m}^3) \qquad (5.28)$$

Où B est une constante :

$B = 1{,}287\ 10^{-5}$ (W/m^3. K^5), si $[\lambda]\ en\ m$
$B = 1{,}287\ 10^{-11}$ (W/m^2. µm. K^5), si $[\lambda]\ en\ \mu m$

5.3.4 Loi de Stefan-Boltzmann

Cette loi permet d'obtenir l'émittance totale M° par intégration sur toutes les longueurs d'onde de la loi de Planck (3.26) :

$$M^{\circ} = \int_0^{\infty} M_{\lambda}^{\circ}\, d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} d\lambda = \sigma T^4 \quad (\mathrm{W/m^2}) \qquad (5.29)$$

Où $\sigma = \frac{2\pi\, k^4}{15\, c_0^2\, h^3} = 5{,}67\ 10^{-8}$ ($\mathrm{W/m^2.\ K^4}$) est la constante de Stefan-Boltzmann.

Pour le corps noir, nous avons aussi :

$$M_{\lambda}^{\circ} = \pi L_{\lambda}^{\circ} \quad et \quad M^{\circ} = \pi L^{\circ} \qquad (5.30a, b)$$

5.3.5 Fraction de l'émission spectrale des corps noirs

Il s'agit d'évaluer la fraction de l'émittance totale contenue dans un intervalle spectral $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Cette fraction est donnée par :

$$F_{\lambda_1 \to \lambda_2} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{\lambda}^{\circ} d\lambda}{\int_0^{\infty} M_{\lambda}^{\circ} d\lambda} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{\lambda}^{\circ} d\lambda}{\sigma T^4} \qquad (5.31a)$$

Cette expression peut également s'écrire sous la forme :

$$F_{\lambda_1 \to \lambda_2} = \frac{1}{\sigma T^4}\left[\int_0^{\lambda_2} M_{\lambda}^{\circ} d\lambda - \int_0^{\lambda_1} M_{\lambda}^{\circ} d\lambda \right] = F_{0 \to \lambda_2} - F_{0 \to \lambda_1} \qquad (5.31b)$$

Avec : $$F_{0 \to \lambda} = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^{\lambda} M_{\lambda}^{\circ} d\lambda \qquad (5.32)$$

- **Utilisation de la fraction universelle : $F_{0 \to \lambda T}$**

La fraction, $F_{0 \to \lambda}$, de l'émittance totale dans l'intervalle $[0, \lambda_1]$, fonction de T uniquement, s'écrit :

$$F_{0 \to \lambda} = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^{\lambda} M_{\lambda}^{\circ} d\lambda = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^{\lambda} \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} d\lambda$$
$$= \frac{1}{\sigma} \int_0^{\lambda T} \frac{C_1 (\lambda T)^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} d(\lambda T) = F_{0 \to \lambda T} \qquad (5.33)$$

Le changement de variable $''u = \lambda T''$ permet de définir une fonction $F_{0 \to \lambda T}$ ''universelle''. Le tableau (5.1) donne la fraction $F_{0 \to \lambda T}$ en fonction de la nouvelle variable λT.

λT (μm · K)	$F_{(0\to\lambda)}$	λT (μm · K)	$F_{(0\to\lambda)}$	λT (μm · K)	$F_{(0\to\lambda)}$
200	0.000000	4,000	0.480877	8,000	0.856288
400	0.000000	4,200	0.516014	8,500	0.874608
600	0.000000	4,400	0.548796	9,000	0.890029
800	0.000016	4,600	0.579280	9,500	0.903085
1,000	0.000321	4,800	0.607559	10,000	0.914199
1,200	0.002134	5,000	0.633747	10,500	0.923710
1,400	0.007790	5,200	0.658970	11,000	0.931890
1,600	0.019718	5,400	0.680360	11,500	0.939959
1,800	0.039341	5,600	0.701046	12,000	0.945098
2,000	0.066728	5,800	0.720158	13,000	0.955139
2,200	0.100888	6,000	0.737818	14,000	0.962898
2,400	0.140256	6,200	0.754140	15,000	0.969981
2,600	0.183120	6,400	0.769234	18,000	0.980860
2,800	0.227897	6,600	0.783199	20,000	0.985602
2,898	0.250108	6,800	0.796129	25,000	0.992215
3,000	0.273232	7,000	0.808109	30,000	0.995340
3,200	0.318102	7,200	0.819217	40,000	0.997967
3,400	0.361735	7,400	0.829527	50,000	0.998953
3,600	0.403607	7,600	0.839102	75,000	0.999713
3,800	0.443382	7,800	0.848005	100,000	0.999905

Tableau 5.1 : Fraction de l'émittance du corps noir

Exemple :

Considérons une ampoule électrique munie d'un filament de tungstène de température T=2500 K. Pour déterminer la fraction de l'énergie émise dans le visible, il suffit de calculer $F_{\lambda_1\to\lambda_2}$ avec λ_1=0,4 μm et λ_2=0,7 μm.

Les valeurs de $F_{0\to\lambda_1}$ et $F_{0\to\lambda_2}$ sont obtenues dans le tableau 3. 1.

$\lambda_2 T$ = 0,7x2500 = 1750 et $\lambda_1 T$ = 0,4x2500 = 1000.

$F_{\lambda_1\to\lambda_2} = F_{0\to\lambda_2} - F_{0\to\lambda_1}$ = 0.03392 – 0.00032 = 0.0336.

On trouve donc qu'il n'y a que 3.36 % de l'énergie totale émise par le filament qui sert à éclairer. Le reste est dissipé sous forme de chaleur. On comprend alors tout l'intérêt des lampes halogènes dont une plus grande fraction de l'énergie sert à éclairer.

5.4 Rayonnement des corps réels

5.4.1 Facteurs d'émission (ou émissivité) des corps réels

Les propriétés émissives des corps réels sont comparées à celles du corps noir. Cette comparaison se fait à l'aide de coefficients $\varepsilon < 1$ appelés «facteurs d'émission» ou «émissivités». On a 4 types de facteurs d'émission :

- **Emissivité monochromatique directionnelle :**

Elle est définie par la relation suivante :

$$\varepsilon_{x,\lambda} = \frac{d^3\phi^e_{x,\lambda}}{d^3\phi^{0,e}_{x,\lambda}} = \frac{L^e_{x,\lambda}}{L^0_\lambda} = \frac{\pi L^e_{x,\lambda}}{M^0_\lambda} \quad (5.34)$$

- **Emissivité totale directionnelle :**

$$\varepsilon_x = \frac{L_x^e}{L^0} = \frac{\int_0^\infty L_{x,\lambda}^e \, d\lambda}{\int_0^\infty L_\lambda^0 \, d\lambda} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_{x,\lambda} \, L_\lambda^0 \, d\lambda}{L^0} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_{x,\lambda} \, M_\lambda^0 \, d\lambda}{M^0} \qquad (5.35)$$

- **Emissivité monochromatique hémisphérique :**

$$\varepsilon_\lambda = \frac{M_\lambda}{M_\lambda^0} = \frac{\int_\cap L_{x,\lambda}^e \, cos\theta d\Omega}{\int_\cap L_\lambda^0 \, cos\theta d\Omega} = \frac{\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \varepsilon_{x,\lambda} \, L_\lambda^0 cos\theta \, sin\theta \, d\theta d\varphi}{\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} L_\lambda^0 cos\theta sin\theta d\theta d\varphi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \varepsilon_{x,\lambda} cos\theta sin\theta d\theta d\varphi \qquad (5.36)$$

- **Emissivité totale hémisphérique :**

$$\varepsilon = \frac{M}{M^0} = \frac{\int_0^\infty M_\lambda \, d\lambda}{M^0} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda \, M_\lambda^0 \, d\lambda}{\sigma T^4} \qquad (5.37)$$

On constate que l'émissivité du corps noir est :

$$\varepsilon_{x,\lambda}^0 = \varepsilon_\lambda^0 = \varepsilon^0 = 1 \qquad (5.38)$$

De plus, la densité du flux émis par une surface d'un corps réel, dans toutes les directions et dans toutes les longueurs d'onde s'écrit :

$$M = \frac{d\phi^e}{dS} = \varphi^e = \varepsilon\sigma T^4 \qquad (5.39)$$

5.4.2 Absorption, réflexion et transmission des corps réels

Pour un corps noir, le facteur d'absorption est égal à l'unité pour toutes les longueurs d'onde. Pour les corps réels, ce rayonnement sera en partie absorbé, réfléchi et transmis. Ceci conduit à définir les 3 grandeurs : facteur d'absorption α, facteur de réflexion ρ et facteur de transmission τ.

5.4.2.1 Facteurs d'absorption (ou absorptivité)

- **Absorptivité monochromatique directionnelle :**

C'est la fraction absorbée de $d^3\phi_{x,\lambda}^i$.

$$\alpha_{x,\lambda} = \frac{d^3\phi_{x,\lambda}^a}{d^3\phi_{x,\lambda}^i} = \frac{L_{x,\lambda}^a}{L_{x,\lambda}^i} = \frac{E_{x,\lambda}^a}{E_{x,\lambda}} \qquad (5.40)$$

- **Absorptivité monochromatique hémisphérique :**

$$\alpha_\lambda = \frac{\int_\cap L_{x,\lambda}^a \, cos\theta d\Omega}{\int_\cap L_{x,\lambda}^i \, cos\theta d\Omega} = \frac{\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \alpha_{x,\lambda} L_{x,\lambda}^i cos\theta sin\theta d\theta d\varphi}{\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} L_{x,\lambda}^i cos\theta sin\theta d\theta d\varphi} = \frac{E_\lambda^a}{E_\lambda} \qquad (5.41)$$

- **Absorptivité totale hémisphérique :**

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda E_\lambda \, d\lambda}{E} = \frac{E^a}{E} \qquad (5.42)$$

5.4.2.2 Facteurs de réflexion (ou réflectivité)

- **Réflectivité monochromatique directionnelle :**

  C'est la fraction réfléchie de $d^3\phi^i_{x,\lambda}$.

$$\varrho_{x,\lambda} = \frac{d^3\phi^r_{x,\lambda}}{d^3\phi^i_{x,\lambda}} = \frac{L^r_{x,\lambda}}{L^i_{x,\lambda}} = \frac{E^r_{x,\lambda}}{E_{x,\lambda}} \qquad (5.43)$$

- **Réflectivité monochromatique hémisphérique :**

$$\varrho_\lambda = \frac{\int_\cap L^r_{x,\lambda} \cos\theta d\Omega}{\int_\cap L^i_{x,\lambda} \cos\theta d\Omega} = \frac{\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \varrho_{x,\lambda} L^i_{x,\lambda} \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi}{\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} L^i_{x,\lambda} \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi} = \frac{E^r_\lambda}{E_\lambda}$$

(5.44)

- **Réflectivité totale hémisphérique :**

$$\varrho = \frac{\int_0^\infty \varrho_\lambda E_\lambda \, d\lambda}{E} = \frac{E^r}{E}$$

(5.45)

5.4.2.3 Facteurs de transmission (ou transmissivité)

- **Transmissivité monochromatique directionnelle :**

  Elle représente la fraction transmise de $d^3\phi^i_{x,\lambda}$.

$$\tau_{x,\lambda} = \frac{d^3\phi^t_{x,\lambda}}{d^3\phi^i_{x,\lambda}} = \frac{L^t_{x,\lambda}}{L^i_{x,\lambda}} = \frac{E^t_{x,\lambda}}{E_{x,\lambda}}$$

(5.46)

- **Transmissivité monochromatique hémisphérique :**

$$\tau_\lambda = \frac{\int_\cap L^t_{x,\lambda} \cos\theta d\Omega}{\int_\cap L^i_{x,\lambda} \cos\theta d\Omega} = \frac{\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \tau_{x,\lambda} L^i_{x,\lambda} \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi}{\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} L^i_{x,\lambda} \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi} = \frac{E^t_\lambda}{E_\lambda} \qquad (5.47)$$

- **Transmissivité totale hémisphérique :**

$$\tau = \frac{\int_0^\infty \tau_\lambda E_\lambda \, d\lambda}{E} = \frac{E^t}{E} \qquad (5.48)$$

- La conservation de l'énergie à la surface d'un corps réel permet d'écrire les relations suivantes :

$$\alpha_{x,\lambda} + \varrho_{x,\lambda} + \tau_{x,\lambda} = 1 \quad ; \quad \alpha_\lambda + \varrho_\lambda + \tau_\lambda = 1 \quad ; \quad \alpha + \varrho + \tau = 1 \qquad (5.49)$$

- Pour un corps opaque :

$$\tau_{x,\lambda} = \tau_{\lambda} = \tau = 0$$

5.4.3 Loi de Kirchhoff

Pour chaque longueur d'onde et chaque direction de propagation du rayonnement émis par une surface ou incident sur celle-ci, émissivités et absorptivités monochromatiques directionnelles sont égales en équilibre thermique ($d^3\phi^e_{x,\lambda} = d^3\phi^a_{x,\lambda}$). Ce qui donne :

$$\varepsilon_{x,\lambda} = \alpha_{x,\lambda} \tag{5.50}$$

Cas particuliers :

- Si les rayonnements émis et reçus par le corps sont isotropes, la loi de Kirchhoff précédent s'étend aux valeurs monochromatiques hémisphériques :

$$\varepsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda} \tag{5.51}$$

- D'une manière générale, il n'est pas possible d'étendre la loi de Kirchhoff aux valeurs totales hémisphériques, ($\varepsilon \neq \alpha$), sauf dans deux exceptions importants : le corps noir et les corps gris.

i) <u>Corps noir</u> :

$$\varepsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda} = 1 \ et \ \varepsilon = \alpha = 1, \quad \forall \lambda \tag{5.52}$$

ii) <u>Corps gris</u> :

Pour un corps gris, les propriétés radiatives sont indépendantes de la longueur d'onde :

$$\varepsilon_{x,\lambda} = \varepsilon_x \quad \text{et} \quad \alpha_{x,\lambda} = \alpha_x \tag{5.53}$$

Dans ce cas, la loi de Kirchhoff donne :

$$\varepsilon_x = \alpha_x \tag{5.54}$$

Si de plus, le corps gris est à diffusion isotrope, la relation précédente devient :

$$\varepsilon = \alpha \tag{5.55}$$

iii) <u>Corps gris opaque</u> :

Pour un corps gris opaque ($\tau_{x,\lambda} = \tau_{\lambda} = \tau_x = \tau = 0$), la loi de Kirchhoff donne :

$$\varepsilon_x = \alpha_x = 1 - \rho_x$$

Si de plus, ce corps est à diffusion isotrope :

$$\varepsilon = \alpha = 1 - \varrho \tag{5.56}$$

5.5 Echanges radiatifs entre surfaces noires séparées par un milieu transparent

On va établir, dans cette partie, les relations qui permettent de calculer les échanges radiatifs entre surfaces noires isothermes séparées par un milieu transparent.

5.5.1 Facteurs de forme (ou géométrique)

Considérons deus surfaces noires S_i et S_j maintenues à des températures uniformes T_i et T_j (**Fig. 5.6**). Le facteur de forme F_{ij} est défini comme étant la fraction du flux total hémisphérique ϕ_i^e émis par S_i et intercepté par S_j :

$$\phi_{i\to j}^e = F_{ij}\phi_i^e \tag{5.57}$$

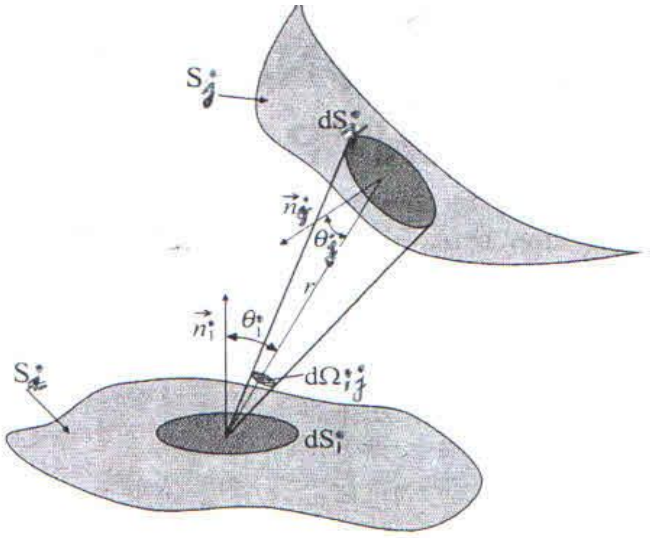


Fig. 5.6 : Transfert de chaleur par rayonnement entre deux surfaces S_i et S_j

Pour déterminer l'expression de F_{ij}, nous écrivons le flux total émis par dS_i en direction de dS_j (voir Equation 5.7) :

$$d^2\phi_{i\to j}^e = L_i^0\, dS_i cos\theta_i\, d\Omega_{ij} \tag{5.58}$$

La luminance L_i^0 est liée à l'émittance M_i^0 par :

$$L_i^0 = \frac{M_i^0}{\pi} \tag{5.59}$$

Alors que l'angle solide sous lequel dS_j est vu de dS_i est :

$$d\Omega_{ij} = \frac{cos\theta_j dS_j}{r^2} \tag{5.60}$$

D'où :

$$d^2\phi_{i\to j}^e = M_i^0\, \frac{cos\theta_i cos\theta_j}{\pi r^2}\, dS_i dS_j \tag{5.61}$$

Donc le flux total émis par S_i et atteignant S_j est :

$$\phi^e_{i\to j} = F_{ij}\phi^e_i = M^0_i \int_{S_i}\int_{S_j} \frac{cos\theta_i cos\theta_j}{\pi r^2} dS_i dS_j \quad (5.62)$$

Sachant que :

$$\phi^e_i = S_i M^0_i \quad (5.63)$$

Donc :

$$F_{ij} = \frac{1}{S_i}\int_{S_i}\int_{S_j} \frac{cos\theta_i cos\theta_j}{\pi r^2} dS_i dS_j \quad (5.64)$$

Finalement :

$$\phi^e_{i\to j} = F_{ij}\phi^e_i = S_i M^0_i F_{ij} \quad (5.65)$$

On remarque que F_{ij} ne dépend que des géométries des deux surfaces et de leur position. Donc c'est un facteur purement géométrique.

D'une manière similaire, le flux émis simultanément par S_j et qui atteint S_i s'écrit :

$$\phi^e_{j\to i} = F_{ji}\phi^e_j = S_j M^0_j F_{ji} \quad (5.\ 66)$$

Où F_{ji} est le facteur de forme entre les surfaces S_j et S_i.

$$F_{ji} = \frac{1}{S_j}\int_{S_i}\int_{S_j} \frac{cos\theta_i cos\theta_j}{\pi r^2} dS_i dS_j \quad (5.67)$$

Les deux expressions (5.64) et (5.67) permet d'obtenir la relation de réciprocité :

$$S_i F_{ij} = S_j F_{ji} \quad (5.68)$$

5.5.2 Propriétés des facteurs de forme

- Relation de réciprocité

Pour deux surfaces quelconques S_i et S_j, on a la relation générale de réciprocité :

$$S_i F_{ij} = S_j F_{ji}$$

- Relation d'additivité (ou de complémentarité)

Pour une enceinte fermée de N surfaces (**Fig. 5.7**), le flux émis par une surface S_i va tomber sur toutes les autres surfaces, y compris S_i si elle est concave, donc :

$$\phi^e_i = \sum_{j=1}^N \phi^e_{ij} = \sum_{j=1}^N \phi^e_i F_{ij} = \phi^e_i \sum_{j=1}^N F_{ij}$$

D'où : $$\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1$$

Avec : $F_{ii} = 0$, si surface plane ou convexe et $F_{ii} \neq 0$, si surface concave

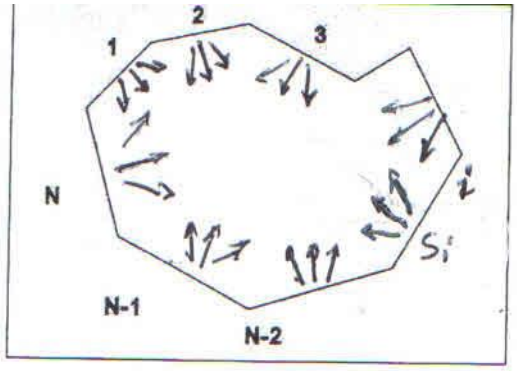


Fig. 5.7 : Flux rayonnés par différentes surfaces formant une enceinte fermée

- Cas d'une surface complexe A_j divisée en surface distinctes

Dans le cas où une surface A_j peut être décomposée en la somme de P surfaces A_k, on a la relation :

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^{P} F_{ik}, \qquad \text{si } A_j = \sum_{k=1}^{P} A_k$$

- $F_{ij} = 0$: si aucun point de S_j n'est vu de S_i
- $F_{ij} = 1$: si S_j entoure complètement S_i (influence totale), avec S_i convexe

5.5.3 Détermination des facteurs de forme

Rarement, on est amené à résoudre les intégrales donnant les facteurs de forme. Cependant, citons quelques grandes voies possibles pour déterminer ces facteurs :

- En pratique, on cherche à déterminer quelques facteurs de forme et puis on profite des relations de réciprocité et d'additivité dans des cas simples.
- Dans le cas de surfaces S_i et S_j très longues suivant la même direction, on peut utiliser la formule de Hottel.
- Utilisation des formules et abaques : Il existe des travaux et ouvrages spécialisés fournissant des abaques et des formules pour les facteurs de forme dans le cas de plusieurs configurations types.
- Méthode d'Ondracek : Une seule intégrale à faire si l'on veut calculer le facteur de forme d'une surface élémentaire dS_1 par rapport à une grande surface S_2.
- Méthode de Monte-Carle : On combine l'imagerie numérique et des outils informatiques pour calculer les facteurs de forme. Cette méthode permet de traiter des formes complexes, contenant des obstacles.

5.5.4 Exemples d'évaluation immédiate de facteurs de forme (voir Fig. 5.8)

- Deux plans de grandes dimensions par rapport à leur distance (Fig. 5.8a)

$S_1 \parallel S_2$, $S_1F_{12} = S_2F_{21}$ avec : $S_1 = S_2 \Rightarrow F_{12} = F_{21}$

Or : $F_{11}+F_{12} = 1$ et $F_{21}+F_{22} = 1$

Les surfaces sont plates $\Rightarrow F_{11} = 0$ et $F_{22} = 0$ d'où : $F_{12} = F_{21} = 1$

- Demi-sphère de rayon R (Fig. 5.8b)

S_1 est plate $\Rightarrow F_{11} = 0$, de plus : $F_{11}+F_{12} = 1 \Rightarrow F_{12} = 1$

$S_2F_{21} = S_1F_{12} \Rightarrow F_{21} = \frac{S_1}{S_2}F_{12} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R^2}{2\pi R^2} = \frac{1}{2}$ et $F_{22} = 1 - F_{21} = \frac{1}{2}$

- Deux spheres concentriques (Fig. 5.8c)

$S_1 = 4\pi R_1^2$ *et* $S_2 = 4\pi R_2^2$ *avec* $R_1 < R_2$

$F_{11} = 0$ (surface convexe), $F_{12} = 1 - F_{11} = 1$

$F_{21} = \frac{S_1}{S_2}F_{12} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$, $F_{22} = 1 - F_{21} = 1 - \frac{S_1}{S_2} = \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2}$

- Deux cylindres concentriques très longs de longueur H (Fig. 5.8d)

$S_1 = 2\pi R_1 H$ *et* $S_2 = 2\pi R_2 H$ *avec* $R_1 < R_2$

$F_{11} = 0$ (surface convexe), $F_{12} = 1 - F_{11} = 1$

$F_{21} = \frac{S_1}{S_2}F_{12} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1}{R_2}$, $F_{22} = 1 - F_{21} = 1 - \frac{S_1}{S_2} = \frac{R_2 - R_1}{R_2}$

- Demi-cylindre de longueur L (Fig. 5.8e)

$F_{11} = 0$ (surface plate), $F_{12} = 1 - F_{11} = 1$

$F_{21} = \frac{S_1}{S_2}F_{12} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{2RL}{\pi RL} = \frac{2}{\pi}$, $F_{22} = 1 - F_{21} = 1 - \frac{S_1}{S_2} = 1 - \frac{2}{\pi}$

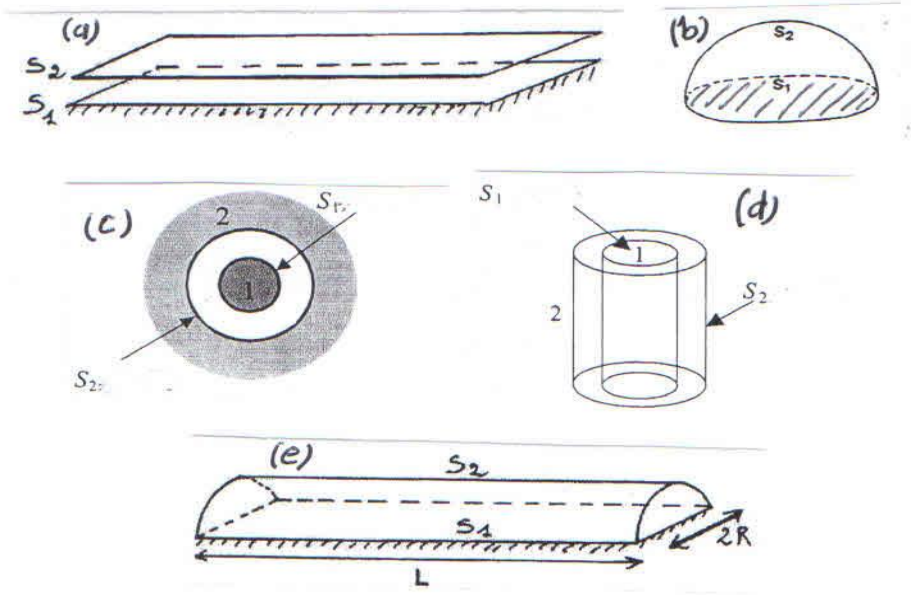


Fig. 5.8 : Facteurs de forme de quelques configurations simples

5.5.5 Expression du flux net échangé entre surfaces noires

- Echanges entre deux surfaces noires : Flux net échangé ϕ_{ij} (**Fig. 5.9**)

Considérons deux surfaces noires isothermes S_i et S_j. On définit le flux net échangé entre S_i et S_j (ou flux net perdu par S_i au profit de S_j) par rayonnement comme la différence du flux émis par S_i et reçu par S_j et du flux rayonné par S_j et incident sur S_i :

$$\phi_{ij} = \phi^e_{i\to j} - \phi^e_{j\to i} = F_{ij}\phi^e_i - F_{ji}\phi^e_j = S_i F_{ij} M^0_i - S_j F_{ji} M^0_j$$

$$\phi_{ij} = S_i F_{ij}(M^0_i - M^0_j) = S_i F_{ij}\sigma\left(T_i^4 - T_j^4\right) = -\phi_{ji} \qquad (5.69)$$

- Si $T_i = T_j \Rightarrow \phi_{ij} = 0$: S_i émet la même quantité qu'elle reçoit
- Si $T_i > T_j \Rightarrow \phi_{ij} > 0$: S_i émet plus qu'elle reçoit (pertes supérieures à la puissance reçue)
- Si $T_i < T_j \Rightarrow \phi_{ij} < 0$: S_i émet moins qu'elle reçoit (gain d'énergie)

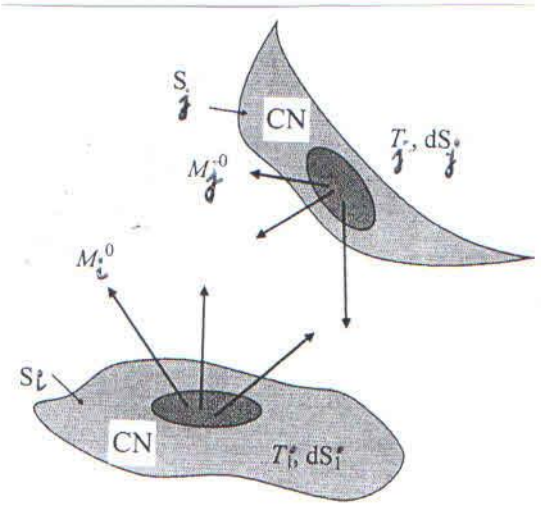


Fig. 5.9 : Echanges radiatifs entre deux surfaces noires

- Echanges au sein d'une enceinte noire : Flux net échangé ϕ_i (**Fig. 5.10**)

Dans le cas d'une enceinte fermée constituée de N surfaces noires maintenues à différentes températures, le flux net perdue (ou échangé) par Si avec les autres surfaces est :

$$\phi_i = \phi^e - \sum_{j=1}^N \phi^e{}_{j\to i} = S_i M^0_i - \sum_{j=1}^N F_{ji} S_j M^0_j = S_i\left(M^0_i - \sum_{j=1}^N F_{ij} M^0_j\right)$$

$$\phi_i = S_i \sum_{j=1}^N F_{ij}(M^0_i - M^0_j) = S_i \sum_{j=1}^N F_{ij}\sigma(T_i^4 - T_j^4) = \sum_{j=1}^N \phi_{ij} \qquad (5.70)$$

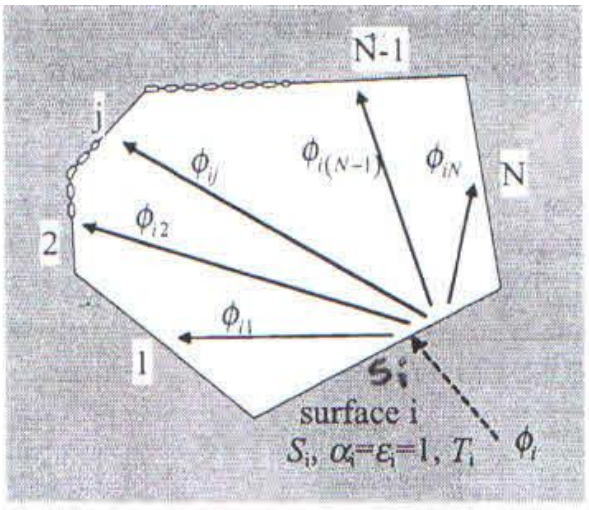


Fig. 5.10 : Echanges radiatifs dans une enceinte formée de N surfaces noires

- Utilisation de l'analogie électrique

Pour deux surfaces noires S_i et S_j, nous avons montré :

$$\phi_{ij} = S_i F_{ij}(M_i^0 - M_j^0) = \frac{(M_i^0 - M_j^0)}{\frac{1}{S_i F_{ij}}} \qquad (5.71)$$

Par analogie, cette relation peut être représentée par le schéma électrique équivalent suivant (**Fig. 5.11**) :

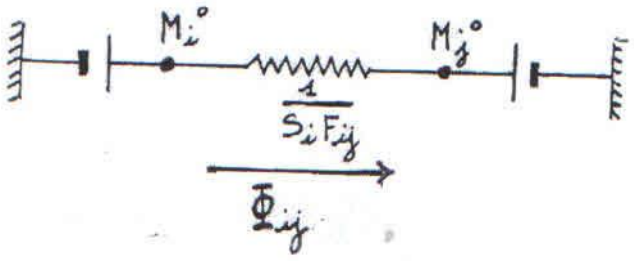


Fig. 5.11 : schéma électrique correspondant à deux surfaces noires

Annexe 3.1 : Facteurs de forme

Tableau 3.2 : Valeur du facteur de forme de quelques configurations particulières

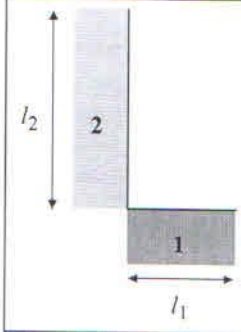
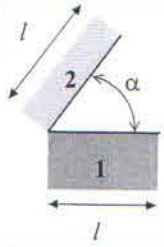
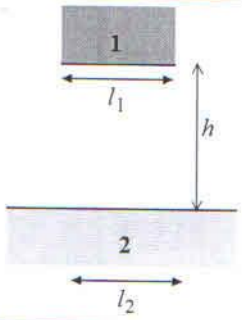
Géométrie	Facteur de forme F_{12}
	2 plaques perpendiculaires jointes $F_{12} = \frac{1+\gamma-\sqrt{1+\gamma^2}}{2}$ $\gamma = \frac{l_2}{l_1}$
	2 plaques de même longueur, inclinées et jointes $F_{12} = 1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
	2 plaques parallèles $F_{12} = \frac{\sqrt{(L_1+L_2)^2+4} - \sqrt{(L_2-L_1)^2+4}}{2L_1}$ $L_1 = \frac{l_1}{h}, L_2 = \frac{l_2}{h}$

Tableau 3.2 : (suite)

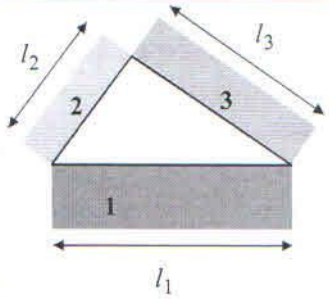
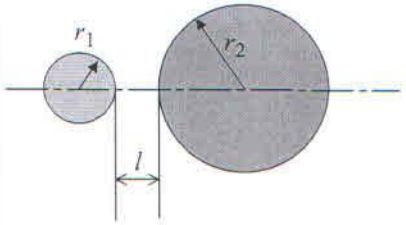
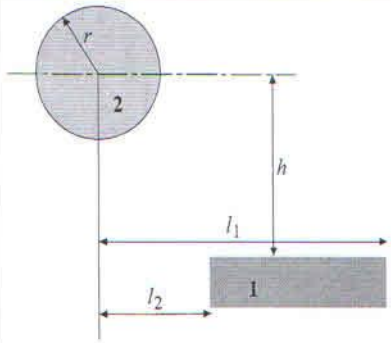
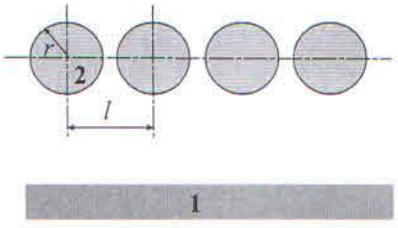
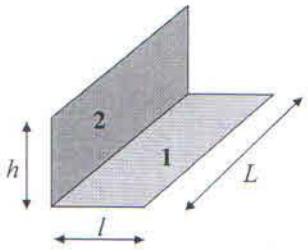
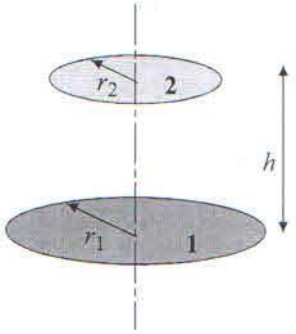
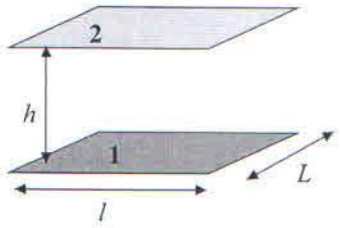
Géométrie	Facteur de forme F_{12}
	Cavité à 3 surfaces $F_{12} = \frac{l_1 + l_2 - l_3}{2 l_1}$
	2 cylindres d'axes parallèles $F_{12} = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} \pi + \sqrt{\alpha^2 - (\beta+1)^2} \\ -\sqrt{\alpha^2 - (\beta-1)^2} \\ +(\beta-1)\cos^{-1}\left(\frac{\beta-1}{\alpha}\right) \\ -(\beta+1)\cos^{-1}\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right) \end{pmatrix}$ $\beta = \frac{r_2}{r_1},\ \alpha = 1 + \beta + \frac{l}{r_1}$
	Cylindre et plan, axe du cylindre parallèle au plan $F_{12} = \frac{r}{l_1 - l_2}\left(\tan^{-1}\frac{l_1}{h} - \tan^{-1}\frac{l_2}{h}\right)$
	Rangée infinie de cylindre et plan $F_{12} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2r}{l}\right)^2} + \frac{2r}{l}\tan^{-1}\sqrt{\frac{l^2 - 4r^2}{4r^2}}$

Tableau 3.2 : (suite)

Géométrie	Facteur de forme F_{12}
	2 murs perpendiculaires $\pi\,\alpha\,F_{12} = \alpha\,\tan^{-1}\frac{1}{\alpha} + \beta\,\tan^{-1}\frac{1}{\alpha} - \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}{1+\alpha^2+\beta^2} \times \left[\frac{\alpha^2(1+\alpha^2+\beta^2)}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}\right]^{\alpha^2} \times \left[\frac{\beta^2(1+\alpha^2+\beta^2)}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}\right]^{\beta^2}\right)$ $\alpha = \frac{l}{L},\ \beta = \frac{h}{L}$
	2 disques coaxiaux $F_{12} = \frac{1}{2}\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2}\right)$ $\beta = 1 + \frac{1+\alpha_2^2}{\alpha_1^2}$ $\alpha_1 = \frac{r_1}{h},\ \alpha_2 = \frac{r_2}{h}$
	2 murs parallèles $\frac{\pi\,\alpha\,\beta}{2}\,F_{12} = \alpha\sqrt{1+\beta^2}\,\tan^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{1+\beta^2}} + \beta\sqrt{1+\alpha^2}\,\tan^{-1}\frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \ln\sqrt{\frac{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}{1+\alpha^2+\beta^2}} - \alpha\tan^{-1}\alpha - \beta\tan^{-1}\beta$ $\alpha = \frac{l}{h},\ \beta = \frac{L}{h}$