Exercice 1: (Questions indépendantes)

1) Une cellule photoélectrique ayant un travail d'extraction $W = 1,2eV$ est éclairée avec une radiation $\lambda = 5000\mathring{A}$.

a. Déterminer le seuil photoélectrique.

b. Calculer l'énergie cinétique et la vitesse desélectrons arrachés.

2) Calculer le commutateur $[X, P_X]$ dans la representation $\{|P\rangle\}$ sachant que l'action de l'opérateur X dans cette representation s'écrit : $X = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x}$.

3) Montrer que l'opérateur définit par: $T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est unitaire.

Exercice 2:

On considère deux kets $|\psi\rangle$ et $|\psi'\rangle$ tel que :

$$|\psi'\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle$$

où θ est réel.

1) Montrer que si $|\psi\rangle$ est normé, alors $|\psi'\rangle$ est aussi normé.

2) Montrer que la probabilité de prédire une mesure arbitraire est la même pour $|\psi\rangle$ et $|\psi'\rangle$.

Exercice 3:

On considère l'opérateur A défini sur la base orthonormée $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ par sa matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1+i \\ 1 & 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

1) Est-ce-que A est hermitique?Justifier.

2) Déterminer les valeurs propres de A.

3) On considère le ket définit par: $|\psi\rangle = |e_1\rangle - |e_3\rangle$

Déterminer la norme de $|\psi\rangle$ et calculer $\langle\psi|A|\psi\rangle$

4) Estce-que A forme un ECOC à lui tout seul.

Bon courage

Correction d'examen Blanc 2

A. EL Boukili

Exercice 1

1) a) le seuil photoélectrique : $W = h\nu_s$

$$\Rightarrow \nu_s = \frac{W}{h} = \frac{1,2 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{6,62 \cdot 10^{-34}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nu_s = 2,9 \cdot 10^{14}\ Hz}$$

b) l'énergie cinétique

$$E_c = h\nu - W = h\frac{c}{\lambda} - W$$

AN : $E_c = 6,62 \cdot 10^{-34} \times \frac{3 \cdot 10^8}{5000 \cdot 10^{-10}} - 1,2 \times 1,6 \cdot 10^{-19}$

$= 3,97 \cdot 10^{-19} - 1,92 \cdot 10^{-19}$

$$\boxed{E_c = 2,05 \cdot 10^{-19}\ J = 1,28\ e.V}$$

La vitesse : $E_c = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$

AN : $v = \sqrt{\frac{2 \times 2,05 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 0,671 \cdot 10^6\ m/s$

$$\boxed{v = 6,71 \cdot 10^5\ m/s}$$

2) $[X ; P_x]\,\psi(p) = (XP_x - P_x X)\,\psi(p)$

$= i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} P_x \psi(p) - P_x X \psi(p)$

$= i\hbar \left(\psi(p) + P_x \frac{\partial \psi(p)}{\partial P_x} \right) - P_x X \psi(p)$

$= i\hbar \psi(p) + i\hbar P_x \frac{\partial \psi(p)}{\partial P_x} - P_x X \psi(p)$

$= i\hbar \psi(p) + P_x \underbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial P_x} \psi(p)} - P_x X \psi(p)$

$= i\hbar\psi(p) + P_x \times \psi(p) - P_x \times \psi(p)$

$\Rightarrow [x, P_x]\psi(p) = i\hbar\psi(p) \quad \forall \psi \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow \boxed{[x, P_x] = i\hbar \mathbb{1}}$

3) $T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$T \cdot T^+ = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$

$\Rightarrow T \cdot T^+ = T^+ \cdot T = \mathbb{1} \Rightarrow T$ est unitaire

Exercice 2

$$|\psi'\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle$$

1) $|\psi\rangle$ normé $\Rightarrow \langle\psi|\psi\rangle = 1$

Montrons que $|\psi'\rangle$ est aussi normé

$\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi| e^{-i\theta} \cdot e^{i\theta} |\psi\rangle$

$= \langle\psi| \mathbb{1} |\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1$

d'où $|\psi'\rangle$ est aussi normé

2) la probabilité d'obtenir une mesure dans l'état $|\psi\rangle$ est donnée par $|\langle u|\psi\rangle|^2$
dans l'état $|\psi'\rangle$ par $|\langle u|\psi'\rangle|^2$

Montrons que ces deux probabilités sont égaux

$$|\langle u|\psi'\rangle|^2 = \langle u|\psi'\rangle \langle u|\psi'\rangle^*$$

$$= \langle u| e^{i\theta}|\psi\rangle \langle u|^* e^{-i\theta}|\psi\rangle^*$$

$$= \underbrace{e^{i\theta} e^{-i\theta}}_{=1} \langle u|\psi\rangle (\langle u|\psi\rangle)^*$$

$$= \langle u|\psi\rangle \langle u|\psi\rangle^*$$

$$= |\langle u|\psi\rangle|^2$$

donc les prédictions sont les mêmes.

Exercice 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1+i \\ 1 & 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

1) $A^+ = (A^*)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1-i \\ 1 & 1+i & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1+i \\ 0 & 1-i & 1 \end{pmatrix} \neq A$

d'où A n'est pas hermétique.

⇒ ~~les valeurs propres de A ne sont pas~~ Tous ~~[illegible]~~ simples

2) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ i & -\lambda & 1+i \\ 1 & 1-i & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1+i \\ 1-i & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left\{(-\lambda)(1-\lambda) - (1-i)(1+i)\right\}$$

$$= (2-\lambda)\left\{\lambda^2 - \lambda - 2\right\}$$

$2-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1+8 = 9 \Rightarrow \lambda_2 = 2 \; ; \; \lambda_3 = -1$

3) $|\psi\rangle = |e_1\rangle - |e_3\rangle$

* $\langle\psi|\psi\rangle = (\langle e_1| - \langle e_3|)(|e_1\rangle - |e_3\rangle)$

$= \langle e_1|e_1\rangle - \langle e_1|e_3\rangle - \langle e_3|e_1\rangle + \langle e_3|e_3\rangle$

$= 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow \langle\psi|\psi\rangle^{1/2} = \sqrt{2}$

le Ket normé s'écrit donc $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle - |e_3\rangle)$

$\langle\psi|A|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ ;\ 0\ ;\ -1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1+i \\ 1 & 1-i & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \end{pmatrix}\ ;\ i\ ;\ -1\Big)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}(1 + 0 + 1) = 1$

4) A n'est pas un ECOC car pour avoir un ECOC on doit avoir
- ✗ - A observable (c'est Hermitique)
- ✓ - A commute avec A
- ✓ - ∃ Ket propres communs formant une base de E

A n'est pas hermitique donc c'est pas une observable, cela veut dire que A n'est pas un ECOC lui même.