Exercice 1: (Questions indépendantes)

1- Une cellule photoélectrique ayant un potentiel d'extraction W=1,5 eV est éclairée avec une radiation de longueur d'onde λ. Le potentiel d'arrêt capable d'arrêter les électrons arraches vaut 1,1 volts.

a) déterminer l'énergie cinétique et la vitesse des électrons arraches.

b) calculer la longueur d'onde de la radiation excitatrice

2- On considère l'ensemble des fonctions d'onde planes $\{V_{p_0}(r)\}$ telle que :

$$V_{p_0}(r) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i.p_0.r/\hbar}$$

Montrer que $\{V_{p_0}(r)\}$ constitue une base orthonormée de l'espace F

3- Soit Π l'opérateur parité dont l'action sur les vecteurs de la base $\{|r\rangle\}$ est définie par

$$\Pi\,|r\rangle = |-r\rangle$$

a) calculer l'élément de matrice $\langle r|\,\Pi\,|r'\rangle$

b) déduire que $\forall\psi \in F:\ \langle r|\,\Pi\,|\psi\rangle = \psi(-r)$

c) montrer que $\Pi^2 = \mathbb{I}$ et que Π est hermétique et unitaire

(Notons ici que $|-r\rangle \neq -|r\rangle$ et que $\mathbb{I}$ est l'opérateur identité)

Donneés: $1ev = 1,6.10^{-19}J$, $m_e = 9,1.10^{-31}kg$, $h = 6,62.10^{-34}j.s$, $c = 3.10^8 m/s$

Probleme

On considère un système physique dont l'espace des états E est rapporté à la base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ et soit H l'Hamiltonien du système définie par

$$H = \omega A$$

avec ω est une constante réelle positive et A une observable définie par

$$A\,|u_1\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|u_1\rangle \quad \text{et} \quad A\,|u_2\rangle = -\frac{\hbar}{2}\,|u_2\rangle$$

À t=0 l'état du système est décrit par le ket

$$|\psi(0)\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})\,|u_1\rangle + \sin(\frac{\theta}{2})\,|u_2\rangle\,, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

1) Déterminer $|\psi(t)\rangle$ décrivant l'état du système à un instant t ultérieure

2) Calculer la valeur moyenne $\langle A\rangle$ dans l'état t=0 et dans l'état t

Que peut-on conclure ?

3) On s'intéresse maintenant à une grandeur B représenté par l'observable B tel que

$$B\,|u_1\rangle = i\frac{\hbar}{2}\,|u_2\rangle \quad \text{et} \quad B\,|u_2\rangle = -i\frac{\hbar}{2}\,|u_1\rangle$$

a) Quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités lorsque on mesure la grandeur B:

I) À l'instant t=0

II) À l'instant t

b) La grandeur B est-t-elle une constante de mouvement ?

4) Le ket $|\psi(t)\rangle$ peut s'écrire sous la forme

$$|\psi(t)\rangle = R(\omega t)\,|\psi(0)\rangle$$

Où $R(\omega t)$ est l'opérateur par lequel le vecteur d'état est transformé entre les instant 0 et t

a) Déterminer la matrice représentant $R(\omega t)$ et vérifier que $R(\omega t)$ est unitaire

b) Exprimer $R(\omega t)$ sous forme d'une combinaison linéaire de l'opérateur identité $\mathbb{I}$ et de l'Hamiltonien H du système

c) Sachant que $R(\omega t)$ commute avec A et non avec B, retrouver l'évolution dans le temps des grandeurs A et B

Bon courage

Correction Examen Blanc — A. EL Bouchikhi

Exercice 1 :

1) a) l'électron arraché est considéré ici libre donc

$$E = E_c = e.|V|$$

A.N : $E_c = e.1,1V = 1,1\ e.V$

En terme de vitesse

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{2E_c}{m}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$$

A.N : $v = \sqrt{\frac{2.1,1.1,6.10^{-19}}{9,1.10^{-31}}} = \sqrt{\frac{3,52}{9,1}}.10^6$

$$v = \sqrt{0,386}.10^6 = 6,21.10^5\ m/s$$

b) D'après l'equation d'Einstein : $E_K = h\nu - W$

$$\Rightarrow h\nu = E_K + W = E_c + W$$

$$\Rightarrow h\frac{c}{\lambda} = E_c + W \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E_c + W}$$

A.N : $\lambda = \frac{6,62.10^{-34}.3.10^8}{(1,1+1,5).1,6.10^{-19}} = 4,77.10^{-7}\ m$

$$\Rightarrow \lambda = 4770\ 10^{-10}\ m = 4770\ \text{Å}$$

2) $\{V_{P_0}(r)\}$ est une Base orthonormée de E si

$$(V_{P_0}, V_{P_0'}) = \int V_{P_0}^*(r) V_{P_0'}(r)\, d^3r = \delta(P_0 - P_0')$$

En effet : $(V_{P_0}, \ ) = \int V_{P_0}^*(r)\, V_{P_0'}(r)\, d^3r$

$$= \int \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-iP_0.r/\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{iP_0'.r/\hbar} d^3r$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int e^{-i(P_0 - P_0').r/\hbar}\, d^3r$$

$$= \delta(P_0 - P_0') \qquad (R.\vartheta)$$

d'où $\{V_{P_0}(r)\}$ est une base orthonormée continue de E.

3) a) on a $\Pi|r'\rangle = |-r'\rangle$

$$\Rightarrow \langle r|\Pi|r'\rangle = \langle r|-r'\rangle$$
$$= \delta(r-(-r'))$$
$$= \delta(r+r')$$

b) $\langle r|\Pi|\psi\rangle = \langle r|\Pi \mathbb{1}|\psi\rangle$

$$= \langle r|\Pi \int |r'\rangle\langle r'|d^3r'|\psi\rangle$$
$$= \langle r|\Pi \int |r'\rangle\langle r'|\psi\rangle d^3r'$$
$$= \int \langle r|\Pi|r'\rangle\langle r'|\psi\rangle d^3r'$$
$$= \int \delta(r+r')\langle r'|\psi\rangle d^3r'$$
$$= \int \delta(r+r')\,\psi(r')\,d^3r'$$

$$\boxed{\langle r|\Pi|\psi\rangle = \psi(-r)}$$

Autrement : $\Pi|r\rangle = |-r\rangle \Rightarrow \langle r|\Pi^\dagger = \langle -r|$

$$\Rightarrow \langle r|\Pi = \langle -r|$$
$$\Rightarrow \langle r|\Pi|\psi\rangle = \langle -r|\psi\rangle$$
$$= \psi(-r)$$

$\Pi^\dagger = \Pi$ car Π est une observable

c) $\Pi^2|r\rangle = \Pi(\Pi|r\rangle) = \Pi(|-r\rangle) = |-(-r)\rangle$

$$= |r\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi^2 = \mathbb{1}}$$

• On a $\Pi|r\rangle = |-r\rangle \Rightarrow \langle r'|\Pi|r\rangle = \langle r'|-r\rangle$
$= \delta(r+r')$

$\Pi|r'\rangle = |-r'\rangle \Rightarrow \langle r'|\Pi^+ = \langle -r'|$

$\Rightarrow \langle r'|\Pi^+|r\rangle = \langle -r'|r\rangle$

$\Rightarrow = \delta(-(r+r'))$

$= \delta(r+r')$

d'où $\Pi^+ = \Pi \Rightarrow \Pi$ est Hermitique

• $\Pi^2 = \mathbb{1} \Rightarrow \Pi.\Pi = \mathbb{1} \Rightarrow \Pi.\Pi^+ = \mathbb{1}$
de même $\Pi^+\Pi = \mathbb{1}$
d'où Π est unitaire.

Problème :

Données : B.O.N $\{|u_1\rangle ; |u_2\rangle\}$
Hamiltonien : $H = \omega A$
$\omega \in \mathbb{R}^+$; $A|u_1\rangle = \frac{\hbar}{2}|u_1\rangle$; $A|u_2\rangle = -\frac{\hbar}{2}|u_2\rangle$.
$t=0$ $|\psi(0)\rangle = \cos(\theta/2)|u_1\rangle + \sin(\theta/2)|u_2\rangle$

1) Déterminons $|\psi(t)\rangle$?
posons $|\psi(t)\rangle = \sum_{k=1}^{2} c_k(t)\,|u_k\rangle$

$|\psi(t)\rangle$ est regie par l'équation de Schrödinger

$$H|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle$$

$$H \sum c_k(t)|u_k\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} \sum c_k(t)|u_k\rangle$$

$$\sum c_k(t)\, H|u_k\rangle = i\hbar \sum \frac{d}{dt}(c_k(t).|u_k\rangle)$$

$$\sum_{k=1}^{2} C_k(t)\, E_k(t)\, |u_k\rangle = \sum_{k=1}^{2} i\hbar \frac{d}{dt} C_k(t)\, |u_k\rangle$$

$$\Rightarrow \forall k=1,2 : C_k(t) E_k(t) = i\hbar \frac{d}{dt} C_k(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d C_k(t)}{C_k(t)} = \frac{1}{i\hbar} E_k\, dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{d C_k(t)}{C_k(t)} = \frac{-i}{\hbar} \int E_k\, dt$$

$$\Rightarrow \ln |C_k(t)| = \frac{-i}{\hbar} E_k t + \alpha$$

$$\Rightarrow C_k(t) = \beta\, e^{-iE_k t/\hbar} \qquad \beta = e^{\alpha}$$

Pour $t=0$: $C_k(0) = \beta e^{0} = \beta$

$$\Rightarrow C_k(t) = C_k(0)\, e^{-iE_k t/\hbar} \qquad k=1,2$$

$k=1$; $C_1(0) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$; $E_1 = \omega \frac{\hbar}{2}$

$k=2$; $C_2(0) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$; $E_2 = -\omega \frac{\hbar}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\omega t/2} |u_1\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\omega t/2} |u_2\rangle}$$

2) À $t=0$ $\quad \langle A \rangle_0 = \langle \psi(0) | A | \psi(0) \rangle$

$$= \left(\cos\frac{\theta}{2} \; ; \; \sin\frac{\theta}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\cos\frac{\theta}{2} \; ; \; \sin\frac{\theta}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ -\frac{\hbar}{2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{\hbar}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = \boxed{\frac{\hbar}{2}\cos(\theta)}$$

À t : $\langle A \rangle_t = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle$

$$= \left(\cos\frac{\theta}{2} e^{+i\omega t/2} \;;\; \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\omega t/2} \right) \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\omega t/2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\omega t/2} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\cos\frac{\theta}{2} e^{+i\omega t/2} \;;\; \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\omega t/2} \right) \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2}\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\omega t/2} \\ -\frac{\hbar}{2}\sin\frac{\theta}{2} e^{i\omega t/2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} e^{+i\omega t/2} e^{-i\omega t/2} - \frac{\hbar}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} e^{-i\omega t/2} e^{i\omega t/2}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\hbar}{2}\cos\theta.$$

On a $\langle A \rangle_{t=0} = \langle A \rangle_t \Rightarrow$ A est une constante du mouvement.

3) $$B = \begin{pmatrix} 0 & +i\frac{\hbar}{2} \\ -i\frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Cherchons les valeurs propres de B :

équation caractéristique : $\det(B - \lambda I) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & +i\frac{\hbar}{2} \\ -i\frac{\hbar}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + i^2\frac{\hbar^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \frac{\hbar^2}{4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{\hbar}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{\hbar}{2} \end{cases}$$

λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres non dégénérée $\Rightarrow$

$$P(\lambda_k) = |\langle \varphi_n | \psi \rangle|^2$$

Cherchons les Ket propres normés : $|\varphi_n\rangle$?

$\lambda_1 = \frac{\hbar}{2}$: $|\varphi_1\rangle = a_1|u_1\rangle + b_1|u_2\rangle$ vect propre

$\Rightarrow B|\varphi_1\rangle = \lambda_1|\varphi_1\rangle$

$$\begin{pmatrix} 0 & +i\frac{\hbar}{2} \\ -i\frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 \\ \lambda_1 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} +i\frac{\hbar}{2} b_1 \\ -i\frac{\hbar}{2} a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 \\ \lambda_1 b_1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow +i\frac{\hbar}{2} b_1 = \frac{\hbar}{2} a_1 \Rightarrow a_1 = +i b_1$

$\Rightarrow |a_1| = |b_1|$

or $\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = 1 \Rightarrow |a_1|^2 + |b_1|^2 = 1$ ($b_1 = -ia_1$)

$\Rightarrow 2|a_1|^2 = 1$

$\Rightarrow |a_1|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow |a_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow a_1 \in \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{i}{\sqrt{2}}; \frac{-i}{\sqrt{2}}\right\}$.

prenons $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow b_1 = -i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \boxed{|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_1\rangle - i|u_2\rangle\right)}$$

$\lambda_2 = -\frac{\hbar}{2}$: $|\varphi_2\rangle = a_2|u_1\rangle + b_2|u_2\rangle$

$B|\varphi_2\rangle = \lambda_2|\varphi_2\rangle$

demi $\Rightarrow \begin{pmatrix} +i\frac{\hbar}{2} b_2 \\ -i\frac{\hbar}{2} a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 b_1 \\ \lambda_2 b_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow -i\frac{\hbar}{2} a_2 = -\frac{\hbar}{2} b_2 \Rightarrow a_2 = -i b_2$

$|a_2| = |b_2|$ ($b_2 = ia_2$)

$\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle = 1 \Rightarrow |a_2|^2 + |b_2|^2 = 1$

$\Rightarrow 2|a_2|^2 = 1 \Rightarrow |a_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

prenons $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow b_2 = \frac{+i}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \boxed{|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_1\rangle + i|u_2\rangle\right)}$$

A $t=0$:

$$Pr(d_1) = |\langle\varphi_1|\psi(t=0)\rangle|^2 = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{+i}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}\right|^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$Pr(d_2) = 1 - P(d_1) = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

A t :

$$Pr(d_1) = |\langle\varphi_1|\psi(t)\rangle|^2$$

$$= \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{+i}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\omega t/2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\omega t/2}\end{pmatrix}\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\omega t/2} + \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\omega t/2}\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\omega t/2 - i\sin\omega t/2\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\omega t}{2} + i\sin\frac{\omega t}{2}\right)\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\omega t}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\omega t}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}}\left|\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\omega t}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\omega t}{2}\right|\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\omega t}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\omega t}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\omega t}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\omega t}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\omega t}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\omega t}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\omega t}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\omega t}{2}$$

$$+ \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\omega t}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\omega t}{2}\sin\frac{\omega t}{2} + \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\omega t}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} - 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\omega t}{2}\sin\frac{\omega t}{2}$$

$$\boxed{Pr(d_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\theta \sin\omega t}$$

$$Pr(d_2) = |\langle \psi_2 | \psi(t)\rangle|^2$$

$$= \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \; -\frac{i}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\omega t/2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\omega t/2} \end{pmatrix} \right|^2$$ demi on trouve :

$$\boxed{Pr(d_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta \sin\omega t}$$

$$Pr(d_1) + Pr(d_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 .$$

b)

$$\langle B\rangle_0 = \sum_{K=1}^{2} E_K Pr(E_K)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\hbar}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{\hbar}{2}}$$

$$\langle B\rangle_t = \frac{\hbar}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta \sin\omega t\right) + \frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta \sin\omega t\right)$$

$$= -\frac{\hbar}{2}\sin\theta \sin(\omega t) = -\sin\theta \sin(\omega t)\langle B\rangle_0$$

$$\frac{d\langle B\rangle_t}{dt} = \boxed{-\omega\frac{\hbar}{2}\sin\theta \cos(\omega t)} + 0$$

d'où B n'est pas une constante de mouvement.

4) $$|\psi(t)\rangle = R(\omega t)\,|\psi(0)\rangle$$

or $$|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\omega t/2}\,|u_1\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\omega t/2}\,|u_2\rangle$$

$$\Rightarrow = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\theta/2 \end{pmatrix}$$

8/10 $$\Rightarrow \boxed{R(\omega t) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix}}$$

vérification : $R(\omega t)\, R^{+}(\omega t) = \mathbb{1}$?

$$\begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

b)
$$R(\omega t) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega t}{2} - i\sin\frac{\omega t}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\omega t}{2} + i\sin\frac{\omega t}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega t}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\omega t}{2} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\sin\frac{\omega t}{2} & 0 \\ 0 & \sin\frac{\omega t}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \cos\tfrac{\omega t}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \sin\tfrac{\omega t}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \cos\left(\tfrac{\omega t}{2}\right) \mathbb{1} - i \sin\tfrac{\omega t}{2} \, \frac{2}{\hbar\omega} \begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar\omega}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R(\omega t) = \cos\frac{\omega t}{2}\, \mathbb{1} - \frac{2i}{\hbar\omega} \sin\frac{\omega t}{2}\, H}$$

c) $\times$ $R(\omega t)$ commute avec A ; cherchons l'évolution de A :

$$\langle A \rangle_t = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | R^{+}(\omega t)\, A\, R(\omega t) | \psi(0) \rangle$$

$$= \langle \psi(0) | \underbrace{R(\omega t)^{+} R(\omega t)}_{\mathbb{1}} A | \psi(0) \rangle$$

$$= \langle \psi(0) | \mathbb{1} A | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | A | \psi(0) \rangle$$

$$= \langle A \rangle_0$$

d'où A n'évolue pas dans le temps

Car A est une constante de mouvement.

* $R(\omega t)$ ne commute pas avec B :

$$\langle B\rangle_t = \langle \psi(t)|B|\psi(t)\rangle = \langle \psi(0)|R(\omega t)^+ B R(\omega t)|\psi(0)\rangle$$

$$R(\omega t)^+ B R(\omega t) = \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i\frac{\hbar}{2} \\ -i\frac{\hbar}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i\frac{\hbar}{2}e^{i\omega t/2} \\ -i\frac{\hbar}{2}e^{-i\omega t/2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2}\end{pmatrix}$$

$$= i\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t/2} \\ -e^{-i\omega t/2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2}\end{pmatrix}$$

$$= i\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ -e^{-i\omega t} & 0\end{pmatrix}$$

$$\langle\psi(0)|R(\omega t)^+ B R(\omega t)|\psi(0)\rangle = \left(\cos\tfrac{\theta}{2}\ \sin\tfrac{\theta}{2}\right) i\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ -e^{-i\omega t} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

$$= i\frac{\hbar}{2}\left(-\sin\tfrac{\theta}{2}e^{-i\omega t}\ \ \cos\tfrac{\theta}{2}e^{i\omega t}\right)\begin{pmatrix}\cos\theta/2 \\ \sin\theta/2\end{pmatrix}$$

$$= i\frac{\hbar}{2}\left(-\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}e^{-i\omega t} + \cos\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\omega t}\right)$$

$$= i\frac{\hbar}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}\left(\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right)\times 2i$$

$$= i\frac{\hbar}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}\sin\omega t \times 2i \quad (i^2=-1)$$

$$= -\frac{\hbar}{2}\sin 2\tfrac{\theta}{2}\sin\omega t$$

$$= -\frac{\hbar}{2}\sin\theta\sin\omega t$$

$$= -\sin\theta\sin\omega t\,\langle B\rangle_0$$

On retrouve bien les résultats obtenus dans la question 2)

10/10

fin